

Механико-математический факультет МГУ

Олимпиада «Абитуриент-2002», март

1. Решить неравенство

$$\log_{\sqrt{2}}(6 - x - x^2) + \log_2(x^2 - 2x + 1) + 2 > 2\log_4(x^2 - 4x + 3)^2.$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cap \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

2. Точка O лежит на диагонали AC выпуклого четырехугольника $ABCD$. Известно, что $OC = OD$ и что точка O одинаково удалена от прямых DA , AB и BC . Найти углы четырехугольника, если $\angle AOB = 110^\circ$ и $\angle COD = 90^\circ$.

$$110^\circ, 90^\circ, 110^\circ, 90^\circ$$

3. Сумма первых четырнадцати членов арифметической прогрессии равна 77. Известно, что ее первый и одиннадцатый члены — натуральные числа. Чему равен восемнадцатый член прогрессии?

$$11$$

4. Основанием пирамиды служит правильный шестиугольник $ABCDEF$, а ее боковое ребро SA перпендикулярно плоскости основания. Расстояния от точек B и C до прямой SD равны соответственно $\sqrt{\frac{23}{14}}$ и $\sqrt{\frac{15}{14}}$. Чему равна площадь треугольника ASD ? Найти отношение наименьшей из площадей треугольных сечений пирамиды, проходящих через ребро SD , к площади треугольника ASD .

$$\frac{1}{8} \sqrt{\frac{15}{14}}$$

5. Решить систему

$$\begin{cases} \frac{y}{x} - 9xy = 2, \\ \frac{z}{y} - 9yz = 6, \\ \frac{3x}{z} - 3zx = 2. \end{cases}$$

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

6. Найти все значения параметра a , при каждом из которых все решения уравнения

$$\begin{aligned} 6 \sin \left(2x - \frac{11}{12} \pi a \right) + 6 \sin \left(\frac{11}{12} \pi a \right) + 3a^3 - 7a^2 + 3a + 1 = \\ = 2(3a^2 - 4a - 1) \cos \left(x - \frac{11}{12} \pi a \right) + 6(a - 1) \sin x, \end{aligned}$$

будучи отложенными на тригонометрической окружности, образуют на ней ровно четыре точки, причем эти точки являются вершинами трапеции.

$\frac{11}{81}$	$;$	$\frac{11}{9}$	$;$	$\frac{11}{9}$	$-$	$\frac{1}{7}$	$;$	$\frac{1}{7}$
-----------------	-----	----------------	-----	----------------	-----	---------------	-----	---------------