

# Механико-математический факультет МГУ

## Олимпиада «Абитуриент-2000», май

1. Решить неравенство

$$\log_{4x^2} x^2 \cdot \log_{8x^4} x^4 \leq 1.$$

$$\left(\infty + ; \frac{1}{8} - \tau\right] \cap \left(\frac{1}{8} - \tau ; \frac{1}{4}\right) \cap \left(\frac{1}{4} - ; \frac{1}{8} - \tau -\right) \cap \left[\frac{1}{8} - \tau - ; \infty -\right)$$

2. Два друга, Ваня и Петя, ходили за грибами. Встретившись перед возвращением домой, они обнаружили, что Ваня нашел 35 грибов, среди которых было несколько подосиновиков, а Петя грибов не нашел. Ваня взял себе белые грибы, а остальные отдал Пете. Петя, обнаружив среди них червивый подберезовик, выкинул его. Сколько было найдено подосиновиков, если доля белых в найденных Ваней грибах оказалась равной доле подосиновиков в принесенных Петей домой грибах?

8

3. Окружность, проходящая через вершины  $B$ ,  $C$  и  $D$  параллелограмма  $ABCD$ , касается прямой  $AD$  и пересекает прямую  $AB$  в точках  $B$  и  $E$ . Найти длину отрезка  $AE$ , если  $AD = 4$  и  $CE = 5$ .

 $\frac{5}{91}$ 

4. Найти  $\frac{\sin(\alpha+\gamma)\sin(\beta+\gamma)}{\cos\gamma\cos(\alpha+\beta+\gamma)}$ , если  $\frac{\sin(\alpha+\gamma)\sin(\beta+\gamma)}{\cos\alpha\cos\beta} = \frac{4}{9}$ .

 $\frac{5}{4}$ 

5. Найти все  $a$ , при которых уравнение

$$(2a + 4)x^2 + (5a + 10)x + a + 10 = 0$$

имеет два корня и между этими корнями расположен ровно один корень уравнения

$$(a - 1)x^4 - (a - 1)x^3 - (a - 7)x^2 + (10a + 5)x - a + 12 = 0.$$

$$(\infty + ; 9) \cap (8 - ; \infty -)$$

6. Параллельные плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  делят тетраэдр  $ABCD$  на три части так, что объем средней части меньше объемов каждой из крайних частей. Расстояния от точек  $A$  и  $B$  до плоскости  $\alpha$  равны 15 и 10 соответственно. Расстояния от точек  $A$  и  $C$  до плоскости  $\beta$  равны 10 и 8 соответственно. Найти отношение площадей сечений тетраэдра плоскостями  $\alpha$  и  $\beta$ , если известно, что одно из этих сечений — трапеция, а расстояние от точки  $D$  до плоскости  $\alpha$  меньше 12.

 $\frac{131}{129}$