

Механико-математический факультет МГУ

Олимпиада «Абитуриент-2000», март

1. Решить неравенство

$$\frac{|x-4| - |x-1|}{|x-3| - |x-2|} < \frac{|x-3| + |x-2|}{|x-4|}.$$

(L; 4) ∩ (4; 8)

2. О первых семи членах убывающей арифметической прогрессии известно, что сумма пятых степеней всех этих членов равна нулю, а сумма их четвертых степеней равна 51. Найти седьмой член этой прогрессии.

$\frac{961}{19} \sqrt[4]{8}$

3. Найти все корни уравнения

$$\cos x \sin \frac{x}{4} + \frac{9}{10} \sin x + 2 \sin \frac{x}{4} \cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{4} - \frac{1}{2} \cos \frac{x}{4} - \frac{9}{20} = 0,$$

принадлежащие отрезку $[-\frac{9}{2}\pi; -\frac{3}{2}\pi]$.

$(\frac{01}{6} -) \cos \frac{x}{4} - \frac{9}{11} - \frac{9}{19} - \frac{9}{23} -$

4. Перпендикуляр к боковой стороне AB трапеции $ABCD$, проходящий через ее середину K , пересекает сторону CD в точке L . Известно, что площадь четырехугольника $AKLD$ в пять раз больше площади четырехугольника $BKLC$, $CL = 3$, $DL = 15$, $KC = 4$. Найти длину отрезка KD .

02

5. При каких значениях параметра a уравнение

$$\left(\left(\frac{3}{2} \right)^x + \left(\frac{3}{2} \right)^{a-x} - \frac{3}{5} \left(\frac{3}{2} \right)^a - \frac{8}{5} \right) \cdot \left(\left(\frac{3}{2} \right)^{2x-2} + \left(\frac{3}{2} \right)^{2a-2x-3} - 4 \left(\frac{3}{2} \right)^{2a-5} + 2 \right) = 0$$

имеет хотя бы одно решение и каждое его решение является целым числом?

$\frac{2}{5}; 1$

6. Вершины квадрата $PQRS$ со стороной $\frac{25}{4}$ лежат на сфере. Параллельные друг другу прямые проходят через точки P, Q, R и S и повторно пересекают сферу в точках P_1, Q_1, R_1 и S_1 соответственно. Известно, что $PP_1 = 2$, $QQ_1 = 10$, $RR_1 = 6$. Найти длину отрезка SS_1 .

2