

## Механико-математический факультет МГУ

### Письменный экзамен, 1999 год (июль)

1. Решить неравенство

$$3^{(x+3)^2} + \frac{1}{9} \leq 3^{x^2-2} + 27^{2x+3}.$$

$$\{0\} \cap \left[\frac{9}{11}; +\infty\right) \ni x$$

2. Решить уравнение

$$|\log_2(2x + 7)| = \log_2(1 + |x + 3|) + \log_2(1 - |x + 3|).$$

$$\{8\}$$

3. При каких значениях  $\varphi$  все положительные корни уравнения

$$\cos\left(\frac{x}{2} + \varphi\right) - \cos\left(\frac{3x}{2} + \varphi\right) = \sin\frac{x}{2},$$

расположенные в порядке возрастания, образуют арифметическую прогрессию?

$$\mathbb{Z} \ni u \cdot \sqrt{2} + \frac{\pi}{2}$$

4. В трапеции  $ABCD$  с боковыми сторонами  $AB = 9$  и  $CD = 5$  биссектриса угла  $D$  пересекает биссектрисы углов  $A$  и  $C$  в точках  $M$  и  $N$  соответственно, а биссектриса угла  $B$  пересекает те же две биссектрисы в точках  $L$  и  $K$ , причем точка  $K$  лежит на основании  $AD$ .

а) В каком отношении прямая  $LN$  делит сторону  $AB$ , а прямая  $MK$  — сторону  $BC$ ?

б) Найти отношение  $MN : KL$ , если  $LM : KN = 3 : 7$ .

$$\frac{17}{5} : \frac{9}{6} : \frac{5}{1} : \frac{1}{8}$$

5. Найти все значения  $a$ , при каждом из которых сумма длин интервалов, составляющих решение неравенства

$$\frac{x^2 + (2a^2 + 6)x - a^2 + 2a - 3}{x^2 + (a^2 + 7a - 7)x - a^2 + 2a - 3} < 0$$

не меньше 1.

$$(\infty; \frac{1}{4}] \cap [8; \infty) \ni a$$

6. Три шара радиусов 1, 2 и 5 расположены так, что каждый из них касается двух других шаров и двух данных плоскостей. Найти расстояние между точками касания первого из этих шаров с плоскостями.

$$\frac{5}{13} \sqrt{\frac{2}{1}}$$