Механико-математический факультет МГУ

Досрочный экзамен, 1998 год (май)

1. Решить неравенство

$$2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{\sin 2x+\left(\sqrt{3}+1\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}+3}=0.$$

$\boxed{\pm\frac{11\pi}{12}+2\pi n;\ n\in\mathbb{Z}}$

2. Решить неравенство

$$\frac{1+\log_{\sqrt{2}}\sqrt{x+4}+\log_{\frac{1}{2}}(13-x)}{|x^2+2x-3|-|2x^2-10x+8|}\geqslant 0.$$

$\boxed{(-4;1)\cup\left(1;\frac{5}{3}\right)\cup\left(\frac{5}{3};11\right)}$

3. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ диагонали BE и CE являются биссектрисами углов при вершинах B и C соответственно, $\angle A=35^\circ$, $\angle D=145^\circ$, а площадь треугольника BCE равна 11. Найти площадь пятиугольника $ABCDE$.

$\boxed{22}$

4. Найти все значения k, при которых хотя бы одна общая точка графиков функций

$$y=-\frac{2}{3}-\arcsin x \quad \text{и} \quad y=-\frac{2}{3}-2\,\mathrm{arctg}\,kx$$

имеет положительную ординату.

$\boxed{\left(\frac{1}{2\cos^2\frac{1}{3}};1\right]}$

5. Четырехугольная пирамида $SABCD$ вписана в сферу, центр которой лежит в плоскости основания $ABCD$. Диагонали AC и BD основания пересекаются в точке H, причем SH — высота пирамиды. Найти ребра CS и CD, если $CH=4$, $AS=3\frac{3}{4}$, $AD=3$ и $AB=BS$.

$\boxed{5;\ \frac{16}{3}}$

6. Фигура задана на координатной плоскости системой

$$\begin{cases}\left(y^2-x^2\right)^2+6\left(y^2-x^2\right)-(y+x)^2+5y+7x+1<0,\\ y>1-x.\end{cases}$$

Сколько интервалов на прямой $y=2-x$ образует ортогональная проекция этой фигуры на указанную прямую?

$\boxed{2}$