Механико-математический факультет МГУ

Досрочный экзамен, 1998 год (март)

1. Решить уравнение

$$4^{2x-2} - 4^x + \left|4^{x-1} - \frac{1}{3}\right| = -\frac{7}{3}.$$

$\boxed{1;\ \frac{3}{2}}$

2. Найти все решения уравнения

$$3\cos\frac{x}{3} + \left(3 - 4\sqrt{3}\right)\sin\frac{x}{6} = 3 - 2\sqrt{3},$$

удовлетворяющие условию $\cos\frac{3x}{4} > 0$.

$\boxed{13\pi + 24\pi k;\ 5\pi + 24\pi n;\ k, n \in \mathbb{Z}}$

3. Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{6-x} - \frac{1}{2}x + \frac{5}{4}\right) \cdot \log_3\left(3x - x^2 - \frac{5}{4}\right) \leqslant \log_{\frac{1}{3}}\left(\left|\frac{1}{4} - \frac{1}{2}x\right| + \frac{3}{2}\right) \cdot \log_2\left(3x - x^2 - \frac{5}{4}\right).$$

$\boxed{\left\{\frac{3}{2}\right\} \cup \left[2; \frac{5}{2}\right)}$

4. Точка F лежит на продолжении стороны BC параллелограмма $ABCD$ за точку C. Отрезок AF пересекает диагональ BD в точке E и сторону CD в точке G. Известно, что $AE = 2$ см, $GF = 3$ см. Найти отношение площадей треугольников BAE и EDG.

$\boxed{4}$

5. В правильной четырехугольной пирамиде $SKLMN$ длины всех ребер равны $2 + \sqrt{2}$. Сфера касается плоскости $KLMN$, а также касается ребер SK, SL, SM и SN пирамиды в точках K_1, L_1, M_1 и N_1 соответственно. На ребре SK взята точка P. Через точки P, L_1 и N_1 проведена плоскость, пересекающая ребро SM в точке Q. Найти длину отрезка SP, если площадь проекции четырехугольника PL_1QN_1 на плоскость $KLMN$ равна $\frac{9}{8}$.

$\boxed{\frac{3}{4};\ \frac{3}{2}}$

6. Найти все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\left(x^2 + (1-a)x - 3(a+2)\right) \cdot \log_{(x-a)}(x - 2a - 1) = 0$$

имеет хотя бы один корень на отрезке $[-2; 1]$, а вне этого отрезка корней не имеет.

$\boxed{\{-4\} \cup [-3; -1]}$