Механико-математический факультет МГУ

Письменный экзамен, 1996 год (июль)

1. Решить уравнение

$$\frac{7}{\cos^2 x} - \frac{7\sqrt{7}}{\cos x} + 10 = 0.$$

$\pm \arccos\left(\frac{\sqrt{7}}{5}\right) + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

2. Решить неравенство

$$\sqrt{8 \cdot 16^x - \frac{1}{2} \cdot 9^x} \leqslant 3 \cdot 4^x - 3^x.$$

$\left[\log_{\frac{4}{3}}\left(3 + \frac{1}{2\sqrt{30}}\right); +\infty\right)$

3. В треугольнике ABC точка O — центр описанной окружности, точка R лежит на отрезке BC и $BR = RC$. Описанная около треугольника BRO окружность пересекает AB в точке T. Найдите площадь треугольника ABC, если $\angle BOR = 30^\circ$, $RT = 8$, $BT = 6$.

48

4. Решить систему

$$\begin{cases} \log_3 18 \sin x - \log_3 3y + |\log_3 \cos x - \log_3 3y| = 1, \\ \frac{1}{4}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{1}{3y^2} \leqslant 1. \end{cases}$$

$\left\{\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{6}, y\right)\right\}$, где $y \geqslant \left(3\left(1 - \frac{1}{4}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{6} - \frac{\pi}{4}\right)^2\right)\right)^{-\frac{1}{2}}$

5. В треугольной пирамиде $AKLM$ выполнено

$$AK = AL = AM, \quad KL = LM = MK, \quad \operatorname{tg}(\angle AKM) = \frac{7}{\sqrt{3}}.$$

Сфера радиуса $2\sqrt{3}$ касается луча LA, касается плоскости AKM и касается плоскости KLM в точке, лежащей на луче LM. Найти наибольшее возможное значение длины отрезка LM.

$\frac{1}{49}\left(48\sqrt{13} - 74\sqrt{3}\right)$

6. При каких значениях параметра a уравнение

$$\left(x^2 - x + a^2 + 1\right)^2 = 4a^2\left(5x^2 - x + 1\right)$$

имеет ровно 3 различных решения?

$\pm 1;\ \pm\frac{1}{10}\left(2 + \sqrt{19}\right)$