Механико-математический факультет МГУ

Письменный экзамен, 1995 год (июль)

1. Найти наибольшее целое число k, удовлетворяющее неравенству

$$4 \cdot 3^{2k+1} + 3^k \leqslant 1.$$

$\boxed{-2}$

2. Решить неравенство

$$\frac{2}{\frac{2}{\log_2 x} - 1} > -3.$$

$\boxed{(0;1) \cup (1;4) \cup (64;+\infty)}$

3. Решить уравнение

$$\sqrt{\sin 3x} \cdot \operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{9}\right) = 0.$$

$\boxed{\frac{\pi}{12} + 2\pi k,\ \frac{19\pi}{12} + 2\pi l,\ \pi m,\ \frac{2\pi}{3} + \pi n,\ k, l, m, n \in \mathbb{Z}}$

4. В окружность вписан четырехугольник $ABCD$, P — точка пересечения его диагоналей, $AB = CD = 5$, $AD > BC$. Высота, спущенная из точки B на сторону AD, равна 3, а площадь треугольника ADP равна $\frac{25}{2}$. Найти длины сторон AD, BC и радиус окружности.

$\boxed{10;\ 2;\ \frac{5\sqrt{5}}{2}}$

5. Три параллельные прямые касаются в точках A, B и C сферы радиуса 4 с центром в точке O. Найти угол BAC, если известно, что площадь треугольника OBC равна 4, а площадь треугольника ABC больше 16.

$\boxed{\frac{5\pi}{12}}$

6. Найти все значения параметра α из отрезка $[0; 2\pi]$, при которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2z(x + y + z) - \sin\alpha = 0, \\ (x+1)\sin^2\dfrac{\alpha}{2} + y^2\sqrt{x} + \alpha^2\sqrt{z} + \sin\dfrac{3}{2}\alpha = 0 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

$\boxed{0;\ \pi;\ 2\pi}$