Механико-математический факультет МГУ

Письменный экзамен, 1994 год (июль)

1. Решить уравнение

$$\frac{4\sin x - 2\cos 2x - 1}{\cos 2x + \sqrt{3}\cos x - 2} = 0.$$

$\frac{5}{6}\pi + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2^x + 2y = 1, \\ 3y - 6y^2 = 2^{x-1}. \end{cases}$$

$\left(\log_2 \frac{2}{3}; \frac{1}{6}\right)$

3. Решить неравенство

$$\log_{(2-5x)} 3 + \frac{1}{\log_2(2-5x)} \leqslant \frac{1}{\log_6\left(6x^2 - 6x + 1\right)}.$$

$\left[-\frac{1}{3}; 0\right) \cup \left(\frac{1}{5}; \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)$

4. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC диагонали AC и BD пересекаются в точке E. Вокруг треугольника ECB описана окружность, а касательная к этой окружности, проведенная в точке E, пересекает прямую AD в точке F таким образом, что точки A, D и S лежат последовательно на этой прямой. Известно, что $AF = a$, $AD = b$. Найти EF.

$\sqrt{a(a-b)}$

5. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Сфера касается ребер AD, DD_1, CD и прямой BC_1. Найти радиус сферы, если длины ребер куба равны 1.

$2\sqrt{2} - \sqrt{5}$

6. При всех значениях параметра c решить уравнение

$$2x^2 + 2ax - a^2 = \sqrt{4x + 2a + 3a^2}.$$

0; 1 при $a = 0$; $\frac{1-a+\sqrt{1+3a^2}}{2}$ при $a \in \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}; 0\right) \cup \left(0; \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$; $\frac{1-a+\sqrt{1+3a^2}}{2}$, $\frac{-1-a+\sqrt{3a^2-3}}{2}$ при $a \in \left(-\infty; -\frac{2}{\sqrt{3}}\right] \cup \left[\frac{2}{\sqrt{3}}; +\infty\right)$