Механико-математический факультет МГУ

Письменный экзамен, 1993 год (июль)

1. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt[3]{7}}{\log_{x-1}17} \geqslant \frac{\log_{17}(x-1)}{\log_{291}17}.$$

$\boxed{(1;2)}$

2. Найдите все значения b, при которых уравнение

$$9^x + \left(b^2+6\right)3^x - b^2 + 16 = 0$$

не имеет решения

$\boxed{[-4;4]}$

3. Решите систему

$$\begin{cases} (\sin y - \cos x + 1)\left(\operatorname{tg}^2\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right) + \operatorname{tg}^2\left(y+\dfrac{2\pi}{3}\right)\right) = 0, \\ (\cos x + \sin y)(2 + \sin 2y + \cos y) = 0. \end{cases}$$

$\boxed{\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi k; -\frac{5\pi}{6}+2\pi m\right); \left(-\frac{\pi}{6}+\pi n; -\frac{2\pi}{3}+\pi(n+2l)\right); k, l, m, n \in \mathbb{Z}}$

4. В треугольнике PQR медиана, проведенная из вершины Q, имеет длину $\frac{3\sqrt{21}}{4}$. Окружности с центрами в вершинах P и R и радиусами 5 и 1 соответственно касаются друг друга, а вершина Q лежит на прямой, касающейся каждой из окружностей. Найдите площадь S треугольника PQR, если известно, что $S < 7$.

$\boxed{\frac{3\sqrt{5}}{5}}$

5. Точки P, Q, R и S расположены в пространстве так, что середины отрезков SQ и PR лежат на сфере с радиусом a, а отрезки PS, PQ, QR и SR делятся сферой на три части в отношении $1:2:1$ каждый. Найдите расстояние от точки P до прямой QR.

$\boxed{a\sqrt{3{,}9}}$

6. Из пункта A в пункт B с постоянными скоростями выехали два мотоциклиста, а из B в A одновременно с ними выехал третий мотоциклист с постоянной скоростью 80 км/ч. Через 40 минут расстояние между первым и вторым было в два раза меньше, чем между первым и третьим. Через 1 час после старта расстояние между первым и вторым было равно расстоянию между первым и третьим, а также было равно половине расстояния, которое осталось проехать третьему до A. Через 1 час 20 минут после старта расстояние между первым и вторым было равно $\frac{2}{5}$ расстояния между первым и третьим. Найдите расстояние между пунктами A и B.

$\boxed{120 \text{ км}}$