Олимпиада «Ломоносов» по математике

9 класс, 2014 год

1. На острове рыцарей и лжецов живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Однажды путешественник забрёл на вечеринку, на которой собрались 12 жителей острова (назовём их для краткости A, B, ..., L). Путешественник подсел к A и начал задавать вопросы: B — рыцарь или лжец?; C — рыцарь или лжец?; ...; L — рыцарь или лжец? По полученным 11-ти ответам путешественник смог определить, сколько всего рыцарей среди A, ..., L. Сделайте это и вы.

2. Хорда AC образует угол 32° с диаметром AD. Из центра окружности O опущен перпендикуляр OH на хорду AC, его продолжение пересекает окружность в точке B. Найдите угол между прямыми BC и AD.

3. Дан правильный 27-угольник $A_1A_2\ldots A_{27}$. Найдите количество неравнобедренных треугольников с вершинами в точках A_1, A_2, ..., A_{27}. Треугольники, отличающиеся порядком вершин (например, $A_1A_2A_4$ и $A_2A_4A_1$), считаются за один треугольник.

4. Многочлен $a_{2014}x^{2014} + a_{2013}x^{2013} + \ldots + a_1x + a_0$ при всех значениях x совпадает с функцией

$$y = \frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-2014)}{2014!}\,.$$

Найдите сумму чисел $a_2 + a_4 + \ldots + a_{2014}$.

5. Найдите все значения a, при которых сумма модулей корней уравнения $x(x+a-1) = a^2$ равна 2.

6. Множество X состоит из пяти различных чисел x_1, ..., x_5, а множество Y — из семи различных чисел y_1, ..., y_7. Какое наибольшее количество различных чисел заведомо содержит множество, состоящее из сумм вида $x_i + y_j$, где $i \in \{1, \ldots, 5\}$, $j \in \{1, \ldots, 7\}$?

Ответы

1. 6.

2. 3°.

3. 2592.

4. 1006,5.

5. $1,\ -\frac{3}{5}$.

6. 11.