Олимпиада «Ломоносов» по математике

9 класс, 2013 год

1. Дан параллелограмм $ABCD$ и выбраны точки A_1, B_1, C_1 и D_1 такие, что точка A является серединой отрезка DD_1, точка B — серединой AA_1, точка C — серединой BB_1 и точка D — серединой CC_1. Найдите площадь $A_1B_1C_1D_1$, если известно, что $S(ABCD) = 1$.

2. а) Найдите количество натуральных делителей числа $N = 1\underbrace{00\ldots0}_{40}$, не являющихся ни точными квадратами (т. е. квадратами натуральных чисел), ни точными кубами; б) …не представимых в виде m^n, где m и n — натуральные числа, причём $n > 1$.

3. Решить систему

$$\begin{cases} x^2 = 2\sqrt{y^2+1}\,, \\ y^2 = 2\sqrt{z^2-1} - 2, \\ z^2 = 4\sqrt{x^2+2} - 6. \end{cases}$$

4. Коля сел играть в WoW в момент, когда часовая и минутная стрелка были противоположны. Он закончил играть через целое число минут, причём в момент окончания минутная стрелка совпала с часовой. Сколько времени он играл (если известно, что он играл меньше 12 часов)?

5. Найдите все пары натуральных чисел (m, n), для которых выполняется равенство

$$n(n-1)(n-2)(n-3) = m(m-1).$$

6. Две окружности радиусов R и R' касаются друг друга внешним образом в точке P и касаются прямой l в точках A и B соответственно. Пусть Q — точка пересечения прямой BP с первой окружностью. Определить, на каком расстоянии от прямой l расположена точка Q.

7. Доказать, что если числа x, y и z — целые, то число

$$\frac{1}{2}\left((x-y)^4 + (y-z)^4 + (z-x)^4\right)$$

является квадратом некоторого целого числа.

8. Сколькими различными способами можно выбрать целые числа $a, b, c \in [1; 100]$ так, чтобы точки с координатами $A(-1; a)$, $B(0; b)$ и $C(1; c)$ образовывали прямоугольный треугольник?

Ответы

1. 5.

2. а) 1093; б) 981.

3. $\left(\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\,\right)$; $\left(\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2}\,\right)$; $\left(-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\,\right)$; $\left(-\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2}\,\right)$.

4. 6 часов.

5. $(1, 1)$; $(2, 1)$; $(3, 1)$.

6. $2R$.

7.

8. 974.