

Олимпиада «Ломоносов» по математике

8 класс, 2014 год

1. На острове рыцарей и лжецов живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Однажды путешественник забрёл на вечеринку, на которой собрались 12 жителей острова (назовём их для краткости A, B, \dots, L). Путешественник подсел к A и начал задавать вопросы: B — рыцарь или лжец?; C — рыцарь или лжец?; \dots ; L — рыцарь или лжец? По полученным 11-ти ответам путешественник смог определить, сколько всего рыцарей среди A, \dots, L . Сделайте это и вы.

2. Найдите количество пар целых чисел (m, n) , для которых выполнено равенство

$$n^2 + 2^{2014} = m^2.$$

3. Незнайка придумал фантастическое умножение \circledast , которое для любых x и y удовлетворяет аксиомам нуликративности $x \circledast x = 0$ и тилимилитивности: $x \circledast (y \circledast z) = (x \circledast y) + z$. Помогите Знайке вычислить $1755 \circledast 2014$.

4. Хорда AC образует угол 32° с диаметром AD . Из центра окружности O опущен перпендикуляр OH на хорду AC , его продолжение пересекает окружность в точке B . Найдите угол между прямыми BC и AD .

5. Дан правильный 27-угольник $A_1A_2 \dots A_{27}$. Найдите количество неравносторонних треугольников с вершинами в точках A_1, A_2, \dots, A_{27} . Треугольники, отличающиеся порядком вершин (например, $A_1A_2A_4$ и $A_2A_4A_1$), считаются за один треугольник.

6. Многочлен $a_{2014}x^{2014} + a_{2013}x^{2013} + a_1x + a_0$ при всех значениях x совпадает с функцией

$$y = \frac{(x-1)(x-2)\dots(x-2014)}{2014!}.$$

Найдите сумму чисел $a_2 + a_4 + \dots + a_{2014}$.

Ответы

1. 6.

2. 4026.

3. -259.

4. 3°.

5. 2592.

6. 1006,5