

Олимпиада «Ломоносов» по математике

9 класс, 2018 год

1. Назовём натуральное число n *квадратируемым*, если числа от 1 до n можно расставить в таком порядке, что каждый член последовательности в сумме со своим номером даёт точный квадрат. Например, число 5 квадратируемо, так как можно расставить числа так: 3 2 1 5 4, при этом $3 + 1 = 2 + 2 = 1 + 3 = 4$ и $5 + 4 = 4 + 5 = 9$. Выясните, какие из чисел 7, 9, 11, 15 являются квадратируемыми.

2. Найдите площадь прямоугольного треугольника, если высота, проведённая из вершины прямого угла, разбивает его на два треугольника, у которых радиусы вписанных окружностей равны 3 и 4.

1091

3. Найдите наименьшее значение выражения

$$\frac{1}{1-x^2} + \frac{4}{4-y^2}$$

при условиях $|x| < 1$, $|y| < 2$ и $xy = 1$.

14

4. Числа от 1 до 8 расставлены в вершинах куба так, чтобы сумма чисел в любых трёх вершинах, находящихся на одной грани, была не менее 10. Какова наименьшая возможная сумма чисел, стоящих в вершинах одной грани?

5. Найдите все натуральные k , при которых число $k^2 - 101k$ является точным квадратом, т. е. квадратом целого числа.

1091 или 101

6. Все натуральные числа, сумма цифр каждого из которых равна 5, упорядочили по возрастанию. Какое число стоит на 125-м месте?

10001

7. В «Драконьем покере» в колоде четыре масти. Туз приносит 1 очко, валет — 2 очка, двойка — 2^2 , тройка — 2^3 , ..., десятка — $2^{10} = 1024$ очка. Короли и дамы отсутствуют. Можно выбирать из колоды любое количество карт. Сколькими способами можно набрать 2018 очков?

1373734330

8. Моль проела в ковре дырку в форме прямоугольника со сторонами 10 см и 4 см. Найдите наименьший размер квадратной заплатки, которой можно закрыть эту дырку (заплатка закрывает дырку, если все точки прямоугольника лежат внутри квадрата или на его границе).

Сторона равна $7\sqrt{2}$ см