Олимпиада «Ломоносов» по математике

10–11 классы, 2017 год

1. Когда автомобиль едет из пункта A в пункт B, он тратит 25% времени на путь в гору, 60% — по равнине, а остальное время — с горы. Время его движения из A в B и по той же дороге из B в A одинаково, а его скорости в гору, с горы и по равнине постоянны, но различны. Во сколько раз быстрее автомобиль едет с горы, чем в гору?

$\boxed{\frac{5}{3}}$

2. Решите уравнение

$$\sqrt{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}} = 2\sqrt{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}}+\sqrt{2}\,.$$

$\boxed{\frac{257}{16}}$

3. Выясните, какое из чисел больше: $11^{\lg 121}$ или $10 \cdot 10^{\lg^2 11} + 11$.

$\boxed{\text{Первое}}$

4. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Касательные к этой окружности, проведённые в точках A и C, пересекаются на прямой BD. Найдите сторону AD, если $AB = 2$ и $BC : CD = 4 : 5$.

$\boxed{\frac{5}{2}}$

5. Вычислите $\sqrt{n}+\sqrt{n+524}$, если известно, что это число рациональное и что n — натуральное.

$\boxed{262}$

6. В прямой круговой конус, радиус основания которого равен 2, вписан шар. Найдите объём этого шара, если он в три раза меньше объёма конуса.

$\boxed{\frac{16\pi}{9}\sqrt{9 \pm 5\sqrt{3}}}$

7. Найдите все значения a, при каждом из которых ровно одно из следующих двух утверждений является истинным:

1) «Уравнение $\cos(\cos x) + \sin(\sin x) = a$ имеет ровно два корня на отрезке $[0; \pi]$»;
2) «Уравнение $\sin^4 x + \cos^4 x + \sin 2x = a$ имеет корни».

$\boxed{\left[-\frac{1}{2}; \cos 1\right) \cup \left(\frac{3}{2}; 1 + \sin 1\right)}$

8. Рассматриваются всевозможные наборы, которые состоят из 2017 различных натуральных чисел и в каждом из которых ни одно из чисел нельзя представить в виде суммы двух других чисел этого набора. Какое наименьшее значение может принимать наибольшее число в таком наборе?