Олимпиада «Ломоносов» по математике

10–11 классы, 2016 год

1. Незнайка прыгал от своего дома к дому Знайки. Три четверти пути он пропрыгал прыжками, длина которых равна двум его обычным шагам, а остальную четверть пути — прыжками, длина которых равна трём его обычным шагам. Оказалось, что прыжков в два шага оказалось на 350 больше, чем прыжков в три шага. Сколько обычных шагов от дома Знайки до дома Незнайки? Считаем, что все шаги у Незнайки одинаковые.

$\boxed{1200}$

2. Найдите все решения уравнения

$$\operatorname{arcctg}^2 x = 3 \operatorname{arctg}^2 x + \frac{\pi^2}{36}.$$

$\boxed{\frac{1}{\sqrt{3}}}$

3. Том Сойер, Сид Сойер и Гек Финн красили забор. Вначале Том красил один в течение времени, за которое Сид и Гек, работая вместе, могли бы покрасить половину забора. Затем красил один Сид в течение времени, за которое Том и Гек, работая вместе, могли бы покрасить 5/4 всего забора. Потом красил один Гек в течение времени, за которое Том и Сид, работая вместе, могли бы покрасить четверть всего забора. В результате весь забор был покрашен. Во сколько раз быстрее они окончили бы работу, если бы с самого начала всё время работали вместе? (Предполагается, что скорость работы каждого мальчика постоянна.)

$\boxed{3}$

4. В треугольнике ABC точки A_1, B_1, C_1 — середины сторон BC, AC и AB соответственно. Найдите длину стороны AC, если известно, что сумма векторов $3 \cdot \overrightarrow{AA_1} + 4 \cdot \overrightarrow{BB_1} + 5 \cdot \overrightarrow{CC_1}$ равна вектору с координатами $(2, 1)$.

$\boxed{\frac{2\sqrt{5}}{3}}$

5. Найдите все решения неравенства

$$\left(\log_{\frac{\pi}{6}}(2x-5) - \log_{\frac{\pi}{6}}(7-2x)\right)\left(\cos\left(x+\frac{7}{4}\right) - \cos(2x-1)\right)(|x-4| - |2x-5|) \geqslant 0.$$

$\boxed{\left(\frac{5}{2}; \frac{11}{4}\right] \cup \{3\}}$

6. Найдите произведение всех значений x, при каждом из которых

$$\left(\sqrt{4-\sqrt{11}}\right)^{x^2-9x+11}, \quad 2^{x^2-9x+11}, \quad \left(\sqrt{4+\sqrt{11}}\right)^{x^2-9x+11}$$

— арифметическая прогрессия.

$\boxed{99}$

7. Найдите наибольшее значение объёма треугольной пирамиды, у которой противоположные рёбра попарно равны, а сумма длин всех ребер равна $36\sqrt{2}$.

$\boxed{72}$

8. Какое наибольшее количество чисел можно выбрать из множества всех нечётных чисел, лежащих между 16 и 2016, чтобы ни одно из выбранных чисел не делилось ни на одно другое?

$\boxed{672}$