Олимпиада «Ломоносов» по математике

9 класс, 2015 год

1. В некоторой стране алфавит состоит из трёх букв: М, Г и У. Словом называется любая состоящая из этих букв конечная последовательность, в которой две согласные не могут стоять рядом и две гласные не могут стоять рядом. Сколько в этой стране состоящих из 200 букв слов, которые содержат каждую из трёх букв хотя бы по разу?

$\boxed{2^{101} - 4}$

2. График квадратичной функции $f(x) = x^2 + 2px - p^2 + 7p - 2015$ пересекает координатные оси в трёх точках A, B и C. Найдите значение p, при котором произведение длин отрезков $OA \cdot OB \cdot OC$ будет наименьшим.

$\boxed{\frac{7}{2}}$

3. В треугольнике ABC, основание AB которого лежит на оси абсцисс, проведены высоты AM, BN и CK. Найдите длину основания AB, если известны координаты точек $M(2, 2)$ и $N(4, 4)$.

$\boxed{4\sqrt{5}}$

4. Все натуральные числа разбили на «хорошие» и «плохие» по следующим правилам:

1) из любого плохого числа можно вычесть некоторое натуральное число, не превосходящее его половины, так, чтобы получившаяся разность стала хорошей;

2) из хорошего числа нельзя вычесть не более половины так, чтобы оно осталось хорошим.

Известно, что число 1 — хорошее. Найдите ближайшее к 2015 хорошее число.

$\boxed{2047}$

5. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ площади треугольников ABD и BCD равны, а площадь ACD равна половине площади ABD. Найдите длину отрезка CM, где M — середина стороны AB, если известно, что $AD = 12$.

$\boxed{18}$

6. Последовательность задана рекуррентным соотношением $a_1 = a_2 = 1$, $a_{n+1} = a_n \cdot a_{n-1} + 3$. Может ли число $a_{2015} - a_{2011} - 39$ быть простым?

$\boxed{\text{Нет}}$

7. Найдите все решения системы в натуральных числах:

$$\begin{cases} a^3 + b = c(a^2 + b^2), \\ a + b^3 = d(a^2 + b^2). \end{cases}$$

$\boxed{(1,1,1,1)}$