Олимпиада «Ломоносов» по математике

2010 год

1. Решите неравенство

$$\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{(\log_2 3)^{4-x^2}} \leqslant \left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{-(\log_3 2)^{2x-1}}.$$

$\boxed{[-1;3]}$

2. На основании AC равнобедренного треугольника ABC взята точка E, а на боковых сторонах AB и BC точки D и F так, что $DE \parallel BC$ и $EF \parallel AB$. Какую часть площади треугольника ABC занимает площадь треугольника DEF, если $BF : EF = 2:3$?

$\boxed{\frac{6}{25}}$

3. Два вкладчика вложили деньги в общее дело. После этого один из них добавил ещё 1 млн р., в результате чего его доля в общем деле увеличилась на 0,04, а когда он добавил ещё 1 млн р., его доля увеличилась ещё на 0,02. Сколько денег ему нужно добавить ещё, чтобы увеличить свою долю ещё на 0,04?

$\boxed{8 \text{ млн р.}}$

4. Решите неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{-x-2}} - \frac{1}{\sqrt{x+4}} \leqslant 1 + \frac{1}{\sqrt{(x+4)(-x-2)}}.$$

$\boxed{\left(-4; -3+2\sqrt{\sqrt{5}-2}\right]}$

5. Числа 54 и 128 являются членами геометрической прогрессии. Найдите все натуральные числа, которые могут встретиться в этой прогрессии.

$\boxed{54, 72, 96, 128}$

6. Проекции некоторой кривой в координатном пространстве на плоскости Oxz и Oyz удовлетворяют уравнениям $5x + \cos z = 0$ и $z = \operatorname{arctg}\sqrt{y-3}$ соответственно. Найдите функцию $y = f(x)$, график которой состоит из тех и только тех точек, которые могли бы при этих условиях служить проекциями точек той же кривой на плоскость Oxy.

$\boxed{y = \frac{1}{25x^2} + 2 \text{ при } x \in \left[-\frac{1}{5}; 0\right)}$

7. Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} 25^x - 13\cdot 5^x + a < 0, \\ 12\sin^4 \pi x - \cos 4\pi x = 11 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

$\boxed{a < 13\sqrt{5} - 5}$

8. На ребре AS треугольной пирамиды $SABC$ отмечены такие точки M и N, что $AM = MN = NS$. Найдите площадь треугольника NBC, если площади треугольников ABC, MBC и SBC равны 1, 2 и $\sqrt{37}$ соответственно.

$\boxed{4}$

9. На доске написан квадратный трёхчлен $x^2 + 9x + 47$. Таня (по своему усмотрению) увеличивает или уменьшает на 1 коэффициент при x, после чего Ваня увеличивает или уменьшает на фиксированное число m свободный член, а далее эти действия повторяются. Как только написанный на доске многочлен имеет целый корень, Ваня получает оценку «пять». Может ли он обеспечить себе «пятёрку» при любых действиях Тани, если а) $m = 2$; б) $m = 3$?

а) Да; б) нет

10. Диагонали трапеции $ABCD$ с основаниями $AD = 3$ и $BC = 1$ пересекаются в точке O. Две окружности, пересекающие основание BC в точках K и L соответственно, касаются друг друга в точке O, а прямой AD — в точках A и D соответственно. Найдите $AK^2 + DL^2$.

$\boxed{12}$