Олимпиада «Ломоносов» по математике

2008 год

1. Найдите k, если

$$\cfrac{1}{\cfrac{1}{\cfrac{1}{\sqrt{5}-2k}+4}+4}+4=\sqrt{5}+2.$$

$\boxed{-1}$

2. Какое наибольшее число раз можно последовательно взять логарифм по основанию 3 от числа 27^{81} (первый раз логарифм берётся от этого числа, а затем всякий раз — от числа, полученного в предыдущий раз)?

$\boxed{5}$

3. При каких значениях a существует единственное решение системы

$$\begin{cases} x^2+y^2=4, \\ (x-3)^2+(y+4)^2=a\,? \end{cases}$$

$\boxed{9;\ 49}$

4. Лиса преследовала кролика по прямолинейной дорожке, ведущей к норе кролика. Их скорости были постоянны. В некоторый момент расстояние от кролика до норы было равно 7 м, а до лисы — 13 м. В некоторый следующий момент расстояние между кроликом и норой стало вдвое меньше расстояния между ним и лисой. Успела ли лиса догнать кролика, прежде чем тот юркнул в нору?

$\boxed{\text{Нет}}$

5. Найдите радиус окружности, описанной около равнобедренного треугольника с основанием 6, если синус одного его угла равен косинусу другого.

$\boxed{3 \text{ или } 2\sqrt{3}}$

6. Решите неравенство

$$\sqrt{25^x-2^{3-x}}<7\cdot 2^{-\frac{x}{2}}-2\cdot 5^x.$$

$\boxed{[\log_{50}8;\ \log_{50}9)}$

7. Решить уравнение

$$2+\cos x=\sqrt{3}\left|\sin\frac{3x}{4}\right|\sin x.$$

$\boxed{\frac{2\pi}{3}+4\pi n,\ n\in\mathbb{Z}}$

8. Основанием прямой призмы $ABCA'B'C'$ служит прямоугольный треугольник с катетами $AB = 3$ и $AC = 4$. Через середину бокового ребра $BB' = 10$ параллельно AC проведена прямая l. Какие значения может принимать площадь параллелограмма, у которого две вершины — точки A и B, а остальные вершины лежат на прямых $A'C$ и l соответственно?

$\boxed{3\sqrt{29} \text{ или } 3\sqrt{61}}$

9. Найдите все натуральные значения n, удовлетворяющие уравнению

$$2002\left[n\sqrt{1001^2+1}\right] = n\left[2002\sqrt{1001^2+1}\right],$$

где $[x]$ — наибольшее целое число, не превосходящее числа x.

$\boxed{1, 2, \ldots, 2002}$

10. На числовой прямой отмечены четыре синие точки, соответствующие первым членам геометрической прогрессии с первым членом -2 и знаменателем -2, а также четыре зелёные точки, соответствующие первым членам некоторой арифметической прогрессии с первым членом -5. Какова при этом наименьшая возможная сумма длин четырёх отрезков с разноцветными концами, включающими все восемь отмеченных точек? (Каждая из восьми точек является концом одного из отрезков.)

$\boxed{12}$