Олимпиада «Ломоносов» по математике

2007 год

1. Вычислите $(\sin\alpha - \cos\alpha)(\sin\beta - \cos\beta)$, если $\sin(\alpha+\beta) = 0{,}8$ и $\cos(\alpha-\beta) = 0{,}3$.

$\boxed{-0{,}5}$

2. Решите уравнение

$$\sqrt{2^{x^2}} = \left(2^{\sqrt[5]{x}}\right)^5.$$

$\boxed{0,\ 10^{5/9}}$

3. Какие значения может принимать выражение

$$\log_{b_{11}b_{50}} b_1 b_2 \ldots b_{60},$$

где b_1, b_2, … — геометрическая прогрессия?

$\boxed{30}$

4. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{8-x} - |2x-1|}{\sqrt{x+7} - |2x-1|} \leqslant 1.$$

$\boxed{\left[-7; -\frac{4}{3}\right) \cup \left[\frac{1}{2}; 2\right)}$

5. На стороне AB треугольника ABC взята такая точка D, что окружность, проходящая через точки A, C и D, касается прямой BC. Найдите AD, если $AC = 9$, $BC = 12$ и $CD = 6$.

$\boxed{10}$

6. Натуральные числа a, b и c таковы, что

$$\text{НОК}(a,b) = 60 \quad \text{и} \quad \text{НОК}(a,c) = 270$$

($\text{НОК}(x,y)$ — наименьшее общее кратное чисел x и y.) Найдите $\text{НОК}(b,c)$.

$\boxed{108 \text{ или } 540}$

7. Определите, под каким углом видно из начала координат (т. е. внутри какого наименьшего угла с вершиной в точке $(0,0)$ помещается) множество, заданное на координатной плоскости неравенством

$$14x^2 + xy + y^2 + 14x + 2y + 4 < 0.$$

$\boxed{\operatorname{arctg}\frac{7}{3} - \frac{\pi}{4}}$

8. Грани двугранного угла пересекают боковую поверхность цилиндра радиуса 5, образуя с его осью углы 70° и 80°, а ребро двугранного угла перпендикулярно этой оси и удалено от неё на расстояние 11. Найдите объём части цилиндра, расположенной внутри двугранного угла.

$\boxed{275\pi\,(\operatorname{tg}20^\circ \pm \operatorname{tg}10^\circ)}$

9. Найдите все значения $x \in (0; \pi]$, удовлетворяющие уравнению

$$|\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} 3x| + |\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x| = \operatorname{tg} 3x.$$

$\boxed{(0; \frac{\pi}{6}) \cup \{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi\}}$

10. В течение четверти учитель по пению ставил детям оценки «1», «2», «3», «4» и «5». Среднее арифметическое всех оценок Вовочки оказалось равным в точности 3,5. И тогда по предложению Вовочки учитель заменил одну его оценку «4» парой оценок «3» и «5». Докажите, что от этого средняя оценка Вовочки по пению увеличилась. Найдите наибольшее возможное её значение после такой замены:

а) одной оценки «4»;

б) всех его оценок «4».

$\boxed{\text{а) } 3\frac{2}{3}\text{; б) } 3\frac{8}{11}}$