Олимпиада «Ломоносов» по математике

2005 год

1. Вычислите
$$\frac{(x-y)(x^4-y^4)}{x^2-y^2}-\frac{2xy(x^3-y^3)}{x^2+xy+y^2}$$
при $x=1,\underbrace{2\ldots2}_{46}$ и $y=-2,\underbrace{7\ldots7}_{45}8$.

$\boxed{64}$

2. Решите неравенство
$$\frac{3\cdot2^{1-x}+1}{2^x-1}\geqslant\frac{1}{1-2^{-x}}\,.$$

$\boxed{(0;\log_2 3]}$

3. Найдите площадь трапеции $ABCD$ с боковой стороной $BC=5$, если расстояния от вершин A и D до прямой BC равны 3 и 7 соответственно.

$\boxed{25}$

4. Решите уравнение
$$\log_4\left(4\sin^2 2x\right)=2-\log_2(-2\operatorname{tg}x)\,.$$

$\boxed{-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}}$

5. На окружности взята точка A, на её диаметре BC — точки D и E, а на его продолжении за точку B — точка F. Найдите BC, если $\angle BAD=\angle ACD$, $\angle BAF=\angle CAE$, $BD=2$, $BE=5$ и $BF=4$.

$\boxed{11}$

6. Решите неравенство
$$5|x|\leqslant x\left(3x+2-2\sqrt{8-2x-x^2}\right).$$

$\boxed{\left[-4;\frac{2\sqrt{101}-25}{13}\right]\cup\{0\}\cup\left[\frac{23}{13};2\right]}$

7. Основанием пирамиды служит треугольник со сторонами 5, 12 и 13, а её высота образует с высотами боковых граней (опущенными из той же вершины) одинаковые углы, не меньшие 30°. Какой наибольший объём может иметь такая пирамида?

$\boxed{150\sqrt{3}}$

8. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение
$$4x-\big|3x-|x+a|\big|=9|x-1|$$
имеет хотя бы один корень.

$\boxed{[-8;6]}$

9. Группа отдыхающих в течение 2 ч 40 мин каталась на моторной лодке по реке с постоянной скоростью (относительно воды) попеременно то по течению, то против: в каждую сторону — в общей сложности не менее чем по 1 ч. В итоге лодка прошла путь 40 км (относительно берега) и, отчалив от пристани A, причалила к пристани B на расстоянии 10 км от A. В какую сторону текла река? Какова при этих условиях максимальная скорость её течения?

от A к B; 8 км/ч

10. При каждом натуральном n тело Φ_n в координатном пространстве задано неравенством

$$3|x|^n + |8y|^n + |z|^n < 1,$$

а тело Φ — объединение всех тел Φ_n. Найдите объём тела Φ.

1