

Олимпиада «Ломоносов» по математике

10–11 классы, 2014 год

Все задачи оценивались в 15 баллов. Для получения диплома нужно было набрать от 55 баллов.

1. Найдите все значения a , при каждом из которых сумма модулей корней квадратного трёхчлена $x^2 - 5ax + 4a$ равна 3.

2. Миша выписал на доске подряд все натуральные числа от 7 до 2020. Пришла Маша и заменила каждое из этих чисел суммой его цифр. Пришёл Ваня и сделал то же самое с получившимися числами. Так продолжалось до тех пор, пока на доске не осталось 2014 однозначных чисел (цифр). Какова сумма всех оставшихся чисел?

3. Прямоугольник, отношение сторон которого равно 5, имеет наибольшую площадь среди всех прямоугольников, вершины которых лежат на сторонах данного ромба, а стороны параллельны диагоналям ромба. Найдите острый угол ромба.

4. Найдите все пары (a, b) , при которых множество решений неравенства

$$\log_{2014}(2x + a) > x^2 - 2x - b$$

совпадает с промежутком $(1; 2)$.

5. Найдите все значения α , при каждом из которых нули функций

$$f(x) = \sin\left(\frac{3x}{2} + \alpha\right) \quad \text{и} \quad g(x) = 2 \sin 2x + 4 \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{3}$$

строго чередуются на числовой оси.

6. Для охраны объекта заказчик договорился с охранниками о следующем: все они укажут отрезки времени своих предполагаемых дежурств с единственным условием, чтобы их объединение составляло заранее заданный заказчиком отрезок времени, а он выберет из этих отрезков любой набор, удовлетворяющий тому же условию, и оплатит работу из расчёта 300 руб. в час каждому дежурному. Какой наибольший отрезок времени заказчик может задать, чтобы наверняка уложиться в 90000 руб?

7. В правильную треугольную призму $ABCA_1B_1C_1$ вписан шар радиуса $\sqrt{10}$. Найдите объём вписанного в шар прямого кругового цилиндра, основание которого лежит в плоскости, проходящей через точку A и середины рёбер BB_1 и CC_1 .

8. Прямоугольная таблица состоит из 5863 одинаковых клеток. Петя и Вася пронумеровали клетки натуральными числами $1, 2, \dots, 5863$ подряд. Петя нумеровал клетки по строкам слева направо (сначала первую строку, затем вторую и т. д.), а Вася — по столбцам сверху вниз (сначала первый столбец, затем второй и т. д.). Оказалось, что ровно в 7 клетках их номера совпали. Чему равна сумма числа строк и числа столбцов в этой таблице?

Ответы

1. $-\frac{9}{25}$.

2. 10069.

3. $2 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} = \operatorname{arctg} \frac{5}{12}$.

4. $(-\frac{4024}{2013}, \log_{2014} \frac{2013}{4028})$.

5. $\frac{\pi}{2} + \pi n < \alpha < \pi + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

6. 150 часов.

7. 18π .

8. 464.