Олимпиада «Курчатов» по математике

11 класс, 2018 год

1. Найдите все вещественные числа x, удовлетворяющие уравнению

$$\frac{1}{[x]} + \frac{1}{[2x]} = \{x\} + \frac{2}{5}$$

где через $[x]$ обозначена целая часть числа x (то есть наибольшее целое число, не превосходящее x), а $\{x\} = x - [x]$.

$\boxed{2\frac{7}{20};\ 3\frac{1}{10};\ 1\frac{14}{15}}$

2. Вершины правильного 100-угольника раскрашены случайным образом в два цвета: 50 вершин — в белый цвет, 50 — в черный. Докажите, что можно разбить все вершины на 25 групп по 4 вершины так, чтобы в каждой группе было по две вершины каждого цвета, и вершины каждой группы являлись вершинами некоторого прямоугольника.

3. Приведите пример натуральных чисел a и b таких, что

$$\frac{a^2 + a + 1}{b^2 + b + 1} = 2018^2 + 2018 + 1.$$

4. У Васи есть калькулятор с двумя кнопками, на экране которого отображается целое число x. Нажатие на первую кнопку заменяет число x на экране на число $[x/2]$, а нажатие на вторую кнопку заменяет число x на число $4x+1$. Вначале на экране калькулятора отображается число 0. Сколько натуральных чисел, не превосходящих числа 2018, можно получить последовательным нажатием кнопок? (Разрешается в процессе получать числа, большие 2018. Через $[y]$ обозначена целая часть числа y, то есть наибольшее целое число, не превосходящее y.)

$\boxed{232}$

5. Последовательность различных клеток a_1, a_2, $\ldots$, a_k клетчатого квадрата $n \times n$ называется *циклом*, если, во-первых, $k \geqslant 4$, и, во-вторых, клетки a_j и a_{j+1} являются соседними по стороне при всех $j = 1, 2, \ldots, k$ (считаем при этом, что $a_{k+1} = a_1$). Множество X клеток квадрата назовём *разделяющим*, если в любом цикле есть хотя бы одна клетка из множества X. Найдите наименьшее вещественное число C такое, что для любого натурального числа $n \geqslant 2$ в квадрате $n \times n$ существует разделяющее множество из не более чем $C \cdot n^2$ клеток.

6. Тетраэдр $ABCD$ с остроугольными гранями вписан в сферу с центром O. Прямая, проходящая через точку O перпендикулярно плоскости ABC, пересекает сферу в точке E такой, что D и E лежат по разные стороны относительно плоскости ABC. Прямая DE пересекает плоскость ABC в точке F, лежащей внутри треугольника ABC. Оказалось, что $\angle ADE = \angle BDE$, $AF \neq BF$ и $\angle AFB = 80°$. Найдите величину $\angle ACB$.

$\boxed{40°}$