Олимпиада «Курчатов» по математике

11 класс, 2017 год

1. На доске было выписано несколько чисел, их среднее арифметическое было равно M. К ним дописали число 15, при этом среднее арифметическое вы росло до $M+2$. После этого дописали ещё и число 1, и среднее арифметическое уменьшилось до $M+1$. Сколько чисел было на доске изначально? (Найдите все варианты и докажите, что других нет.)

2. Сколько решений в вещественных числах имеет уравнение

$$\operatorname{tg} \frac{2\pi x}{1+x+x^2} = \sqrt{3}\,?$$

3. На сторонах AB и AD квадрата $ABCD$ выбраны точки X и Y так, что $AX = DY$. Прямые BC и DX пересекаются в точке P, прямые CD и BY — в точке Q. Докажите, что точки P, Q, A лежат на одной прямой.

4. Каждый день более половины жителей Цветочного города едят мороженое. Докажите, что найдётся 10 жителей Цветочного города, таких, что в течение каждого из последних 2017 дней хотя бы один из них ел мороженое. (В Цветочном городе живет не менее 10 жителей.)

5. Пусть d_1, d_2, …, d_n — это все натуральные делители числа $10! = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot 10$. Найдите сумму

$$\frac{1}{d_1+\sqrt{10!}} + \frac{1}{d_2+\sqrt{10!}} + \ldots + \frac{1}{d_n+\sqrt{10!}}\,.$$

6. Пусть A и B — различные точки, принадлежащие линии пересечения перпендикулярных плоскостей π_1 и π_2. Точка C принадлежит плоскости π_2, но не принадлежит π_1. Обозначим через P точку пересечения биссектрисы угла ACB с прямой AB и через ω окружность с диаметром AB в плоскости π_1. Плоскость π_3, содержащая CP, пересекает окружность ω в точках D и E. Докажите, что CP — биссектриса угла DCE.