

## Олимпиада «Курчатов» по математике

11 класс, 2015 год

1. Ученику дано число  $x$ : это обыкновенная дробь со знаменателем 9. Ученик вычислил три новых числа  $2x$ ,  $4x$  и  $5x$ , каждое из этих трёх чисел округлил до ближайшего целого и результаты округлений сложил. Получилось 120. Найдите  $x$ . (Число округляется в меньшую сторону, если его дробная часть меньше  $1/2$ , и в большую, если дробная часть больше либо равна  $1/2$ .)

6 86
---------

2.  $f(x) = x^3 - 9x$ ,  $g(x) = x^3 - 5x^2 + 1$ . Докажите, что если  $b > 0$ , то у многочлена  $f + bg$  есть не менее трёх различных действительных корней.

3. Митя сложил все нечётные натуральные делители некоторого чётного числа  $N$  (включая единицу), а Ваня сложил все чётные натуральные делители числа  $N$  (включая само число). Затем Ванину сумму умножили на Митину. Может ли произведение быть квадратом натурального числа?

4.  $ABCD$  — вписанный четырёхугольник,  $AB > CD$ ,  $BC > AD$ . На сторонах  $AB$  и  $BC$  отмечены точки  $X$  и  $Y$  так, что  $AX = CD$  и  $AD = CY$ . Точка  $M$  — середина  $XY$ . Докажите, что угол  $AMC$  — прямой.

5. Вначале на каждой клетке доски  $100 \times 100$  стоит по одной шашке — они считаются столбиками из одной шашки (а в процессе игры будут образовываться столбики и из нескольких шашек). За один ход разрешается переставить любой столбик ходом ладьи: по вертикали или горизонтали *на столько клеток, сколько в нем шашек* (то есть, столбик из одной шашки ходит на соседнюю клетку, из двух шашек — прыгает через клетку и т. п.). Если столбик попал на непустую клетку, он ставится на верх стоящего там столбика и объединяется с ним. Можно ли за 9999 ходов собрать все шашки на одной клетке?

6. Для приготовления картофельного пюре повару Коле надо как можно быстрее получить заданный объём очищенной картошки. Не заботясь об экономии очисток, он из шарообразных картофелин вырезает кубики, каждым взмахом ножа очищая по одной грани. Может ли он справиться с заданием быстрее при той же частоте взмахов ножа, если будет вырезать какие-нибудь другие многогранники? (Формально: верно ли, что из всех многогранников, вырезаемых из данного шара, наибольшее отношение объема к числу граней — у вписанного куба?)