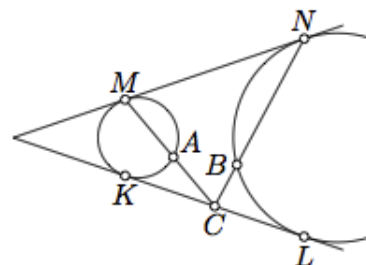


Олимпиада «Курчатов» по математике

11 класс, 2014 год

1. Решите уравнение $[x] \cdot \{x\} = x^2$. Здесь $[x]$ — целая часть, $\{x\}$ — дробная часть числа x .
2. Разделите равнобедренный прямоугольный треугольник на два меньших треугольника так, чтобы какая-то медиана одного из этих треугольников была параллельна одной из высот второго треугольника.
3. На клетчатой доске $(2k + 1) \times (2k + 1)$ расставили n белых и n черных ладей так, что ладьи разных цветов не бьют друг друга. При каком наибольшем n такое возможно?

4. В угол вписаны две непересекающиеся окружности. Одной стороны угла они касаются в точках K и L , другой — в точках M и N (см. рисунок), C — середина отрезка KL , A и B — точки пересечения отрезков CM и CN с окружностями. Докажите, что



- а) точки A , B , M и N лежат на одной окружности;
- б) точки A , B , K и L лежат на одной окружности.

5. Пусть x , y , $\frac{x+5}{y} + \frac{y+5}{x}$ и $\frac{x^2+5}{y} + \frac{y^2+5}{x}$ — целые числа. Докажите, что тогда и число $\frac{x^5+5}{y} + \frac{y^5+5}{x}$ — целое.

6. На квадратной пластинке со стороной 1 см сидит вирус-невидимка Вася. Он и доктор Петя ходят по очереди. Очередным n -м ходом Петя рисует вакциной как чернилами отрезок длиной 1 микрон, а затем Вася должен выбрать направление и проползти в этом направлении *по прямой* расстояние $1/n$ микрона (не выходя за край пластинки). Если Вася проползёт через любую из точек с вакциной или коснётся её, он погибнет. Петя может действовать с любой точностью. Может ли он за конечное число ходов наверняка погубить вирус?

□