Олимпиада «Курчатов» по математике

10 класс, 2014 год

1. Дано натуральное число, кратное 495. Между его цифрами вставили два нуля подряд. Докажите, что полученное число тоже делится на 495.

2. На клетчатой доске $2k \times 2k$ расставили n белых и n черных ладей так, что ладьи разных цветов не бьют друг друга. При каком наибольшем n такое возможно?

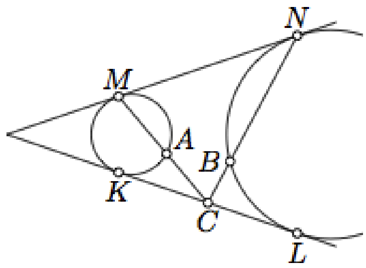
При $n = k^2$

3. На плоскости нарисованы оси координат и график функции $y = 2/x$. Масштаб не указан, но известно, что он по обеим осям одинаков. С помощью циркуля и линейки постройте на данном графике точку, у которой абсцисса положительна и на 2 меньше ординаты.

4. В угол вписаны две непересекающиеся окружности. Одной стороны угла они касаются в точках K и L, другой — в точках M и N (см. рисунок), C — середина отрезка KL, A и B — точки пересечения отрезков CM и CN с окружностями. Докажите, что

а) точки A, B, M и N лежат на одной окружности;

б) точки A, B, K и L лежат на одной окружности.



5. Пусть x, y, $\dfrac{x+3}{y} + \dfrac{y+3}{x}$ и $\dfrac{x^2+3}{y} + \dfrac{y^2+3}{x}$ — целые числа. Докажите, что тогда и число $\dfrac{x^3+3}{y} + \dfrac{y^3+3}{x}$ — целое.