

Олимпиада «Физтех» по математике

9 класс, онлайн-этап, 2013/14 год

1. На доску выписаны числа a_1, a_2, \dots, a_{200} . Известно, что $a_1 = 3, a_2 = 9$. Найдите a_{200} , если для любого натурального n справедливо равенство $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$.
2. Предприниматель Петров купил в Ростове несколько мешков картошки и продал их в Москве, получив на 90000 рублей больше, чем потратил. На все вырученные деньги он снова купил в Ростове картошку и продал в Москве. На этот раз прибыль составила 120000 рублей. Сколько денег он потратил на первую покупку, если цены закупки и продажи мешка картошки не изменились?
3. Сколько существует делящихся на 9 одиннадцатизначных натуральных чисел, в записи которых участвуют только цифры 0 и 8?
4. В мешке 90 шаров, отличающихся только цветом: 25 красных, 25 синих, 25 желтых и 15 зелёных. Какое наименьшее число шаров надо вынуть из мешка, не видя их, чтобы среди них было не менее 15 шаров одного цвета?
5. Сколько одинаковых членов находится среди первых 2000 членов арифметических прогрессий $9, 11, 13, \dots$ и $3, 8, 13, \dots$?
6. Через сколько секунд после того, как часы показывали 7 часов, минутная стрелка догонит часовую? Ответ округлите до целого числа.
7. В парке росли дубы и клёны. Клёнов среди них было 80%. Весной в парке посадили ещё дубов, после чего клёнов стало 40%. А осенью посадили ещё клёнов, и клёнов стало снова 80%. Во сколько раз увеличилось количество деревьев в парке за год?
8. У Васи есть семь книг по математике, а у Вани — девять. Все 16 книг разные. Сколькими способами они смогут обменяться тремя книгами (то есть дать три книги в обмен на три книги)?
9. При каком значении параметра a значение выражения $x_1^2 + x_2^2$ будет наименьшим, если x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 + 4ax + 4a - 3 = 0$?
10. Какая наибольшая площадь может быть у треугольника, если длины двух его медиан равны 12 и 17, а угол между ними равен 150° ?
11. Натуральное число имеет ровно два простых делителя. Его квадрат имеет 51 различных натуральных делителей. Какое наибольшее количество различных натуральных делителей может иметь куб этого числа?
12. Длины сторон треугольника ABC равны 13, 22 и 27. AA_1, BB_1 и CC_1 — его медианы, а AA_2, BB_2 и CC_2 — его высоты. Найдите длину замкнутой ломаной $A_1B_2C_1A_2B_1C_2A_1$.
13. Какое наибольшее значение может быть у наибольшего общего делителя чисел $11n + 6$ и $23n + 5$, если n — натуральное число?
14. Трапеция $ABCD$ с основаниями $BC = 6$ и $AD = 7$ вписана в окружность. Продолжение средней линии MN трапеции за точку M пересекает окружность в точке K . Найдите квадрат высоты трапеции, если $MK = 1$.

15. Дан выпуклый 15-угольник, никакие три диагонали которого не имеют общих точек, отличных от вершин. Найдите число точек пересечения диагоналей (не считая вершин).
16. В равнобедренном треугольнике ABC проведена медиана AM к боковой стороне. Найдите квадрат радиуса окружности, описанной около треугольника ABC , если радиусы окружностей, описанных около треугольников ABM и AMC , равны соответственно 33 и 11.
17. Отметили все вершины правильного 12-угольника. Сколько существует незамкнутых несамопересекающихся семизвенных ломаных с вершинами в отмеченных точках?
18. Какое наибольшее значение может принимать знаменатель геометрической прогрессии b_1, b_2, \dots , если число 5 является корнем уравнения $b_{10}x^9 + \dots + b_3x^2 + b_2x + b_1 = 0$?
19. Из начала координат проведено 240 лучей, которые делят координатную плоскость на углы в $1,5^\circ$. Известно, что четыре из них совпадают с координатными полуосями. Найдите сумму абсцисс точек пересечения этих лучей с прямой $y = 30 - x$.
20. На плоскости нарисован круг и три семейства прямых: в одном — 19 параллельных между собой прямых, в другом — 23 параллельных между собой прямых, в третьем — 36 параллельных между собой прямых. На какое наибольшее число частей прямые могут разбить круг?

Отвѣты

1. 9.
2. 270000.
3. 45.
4. 57.
5. 400.
6. 2291.
7. 6.
8. 2940.
9. 0,25.
10. 68.
11. 100.
12. 62.
13. 83.
14. 29,75.
15. 1365.
16. 396.
17. 126720.
18. $-0,2$.
19. 1785.
20. 2028.