

Олимпиада «Физтех» по математике

8 класс, онлайн-этап, 2012/13 год

1. Из десятизначного числа 2946835107 вычёркивают пять цифр. Какое максимальное число может при этом получиться?
2. Имеется 200 г раствора соли с концентрацией 25%. Сколько грамм воды нужно долить в этот раствор, чтобы концентрация соли стала равна 20%?
3. Найдите наибольшее значение выражения $4b(5a - b) - (5a - 2)(5a + 2)$.
4. На доске были написаны 10 последовательных натуральных чисел. Когда стёрли одно из них, сумма девяти оставшихся оказалась равна 2000. Какое число стёрли?
5. Трое ребят принялись красить лист ватмана, каждый — в свой цвет. Один закрасил красным 75% листа, второй закрасил зелёным 70% листа, а третий закрасил синим 65% листа. Сколько процентов листа будет заведомо покрашено всеми тремя цветами?
6. От двух кусков сплава массами 6 и 12 кг с различным процентным содержанием свинца отрезали по куску равной массы, и каждый из отрезанных кусков сплавляли с остатком другого куска, после чего процентное содержание свинца в обоих сплавах стало одинаковым. Сколько килограммов было в каждом из отрезанных кусков?
7. На маленьком острове $\frac{2}{3}$ всех мужчин женаты и $\frac{3}{5}$ всех женщин замужем. Сколько жителей острова состоят в браке, если всего там проживает 1900 человек?
8. В девятом классе много двоечников, но Петя учится хуже всех. Педсовет решил, что либо Петя должен к концу четверти исправить все двойки, либо его исключат из школы. Если Петя исправит все двойки, то в классе будет 24% двоечников, а если его выгонят, то двоечников станет 25%. Сколько процентов двоечников в этом классе сейчас?
9. Сколько пар натуральных чисел удовлетворяет равенству $2x + 5y = 90000$?
10. Бак, полностью заполненный водой, разлили поровну в три бидона. При этом оказалось, что первый бидон заполнен водой на половину, второй — на $\frac{2}{3}$, третий — на $\frac{3}{4}$. Бак и все три бидона вмещают целое число литров. При каком наименьшем объёме бака (в литрах) возможна такая ситуация?
11. Передние шины автомобиля выходят из строя через 25000 км, а задние — через 15000 км. Какое максимальное количество километров можно проехать на таком автомобиле, если шины разрешается менять местами?
12. Завод выпускает золотые слитки. Выбрав пять слитков, директор измерил вес каждой пары (в унциях) и получил следующие числа: 110, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 120, 121. Сколько унций весит самый лёгкий из этих слитков?
13. В гирлянде из четырёх лампочек одна перегорела. Имеется запасная работающая лампочка. На вывинчивание каждой лампочки требуется 10 секунд, на завинчивание — 15 секунд, на другие действия время не тратится. За какое наименьшее количество секунд можно найти перегоревшую лампочку?

14. Найдите две последние цифры числа 7^{1111} .
15. На Новый год Дед Мороз раздавал конфеты в детском саду. На праздник пришли 28 мальчиков и 35 девочек. Каждый мальчик получил одинаковое количество конфет, и каждая девочка получила одинаковое количество конфет. Оказалось, что существует единственный способ раздать конфеты подобным образом. Какое максимальное количество конфет могло быть у Деда Мороза?
16. Вершины 1000-угольника последовательно занумеровали числами от 1 до 1000 и принялись закрашивать каждую 15-ю вершину: сначала первую, потом 16-ю, потом 31-ю и так далее. Процесс продолжается до тех пор, пока можно закрашивать новые вершины. Сколько вершин останутся в итоге незакрашенными?
17. Натуральные числа m и n таковы, что $\text{НОД}(m, n) = 1$. Какое наибольшее значение может принимать $\text{НОД}(20m + n, 30n + m)$?
18. Али-баба проник в пещеру и обнаружил там неограниченные запасы золота и алмазов. У него имеется мешок, в который входит либо 200 кг золота, либо 40 кг алмазов (пустой мешок ничего не весит). Али-баба может нести на себе максимум 100 кг. За базаре за 1 кг золота дают 20 динаров, а за 1 кг алмазов — 60 динаров. Какое наибольшее количество динаров может получить Али-баба, продав на базаре сокровища, вынесенные из пещеры за одну ходку?
19. В большую коробку положили 10 коробок поменьше. В некоторые из них положили 10 коробок ещё поменьше. В некоторые из этих последних коробок положили 10 коробок ещё меньшего размера и так далее. В результате оказалось, что имеется ровно 2000 коробок, в которых что-то лежит. Какое наибольшее число коробок могут при этом быть пустыми?
20. Имеется желоб, по которому в обе стороны могут кататься одинаковые шарики с фиксированной скоростью. Если два шарика соударяются, каждый из них меняет направление своего движения на противоположное. С одного конца желоба двигаются пять шариков на равных расстояниях друг от друга, с другого конца — семь шариков (тоже на равных расстояниях друг от друга). Сколько всего будет соударений?

Ответы

1. 98517.
2. 50.
3. 4.
4. 225.
5. 10.
6. 4.
7. 1200.
8. 28.
9. 8999.
10. 18.
11. 18750.
12. 54.
13. 75.
14. 43.
15. 280.
16. 800.
17. 599.
18. 3000.
19. 18001.
20. 35.