

Олимпиада «Физтех» по математике

11 класс, 2018 год, вариант 1

1. Найдите все значения x , при каждом из которых одно из трёх данных чисел

$$\log_{x^2}(x^2 - 10x + 21), \quad \log_{x^2} \frac{x^2}{x-7} \quad \text{и} \quad \log_{x^2} \frac{x^2}{x-3}$$

равно сумме двух остальных.

$$\boxed{8 = x}$$

2. Даны две линейные функции $f(x)$ и $g(x)$ такие, что графики $y = f(x)$ и $y = g(x)$ — параллельные прямые, не параллельные осям координат. Найдите наименьшее значение функции $(g(x))^2 + 5f(x)$, если наименьшее значение функции $(f(x))^2 + 5g(x)$ равно -17 .

$$\boxed{\frac{2}{6}}$$

3. На каждой из прямых $y = 1$ и $y = 12$ отмечено по 200 точек с абсциссами $1, 2, 3, \dots, 200$. Сколькими способами можно выбрать три точки из отмеченных 400 так, чтобы они являлись вершинами прямоугольного треугольника?

$$\boxed{89708}$$

4. Числа x и y таковы, что выполняются равенства

$$\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} y = 2 \quad \text{и} \quad 5 \sin(2x - 2y) = \sin 2x \sin 2y.$$

Найдите $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y$.

$$\boxed{\frac{5}{9}}$$

5. Окружность Ω радиуса $\sqrt{3}$ касается сторон BC и AC треугольника ABC в точках K и L соответственно и пересекает сторону AB в точках M и N (M лежит между A и N) так, что отрезок MK параллелен AC , $KC = 1$, $AL = 6$. Найдите $\angle ACB$, длины отрезков MK , AB и площадь треугольника CMN .

$$\boxed{\angle ACB = 120^\circ, MK = 3, AB = 7\sqrt{21}, S_{CMN} = \frac{4}{3}}$$

6. Назовём *расстоянием* между числами модуль их разности. Известно, что сумма расстояний от одиннадцати последовательных *натуральных* чисел до некоторого числа a равна 902, а сумма расстояний от этих же одиннадцати чисел до некоторого числа b равна 374. Найдите все возможные значения a , если известно, что $a + b = 98$.

$$\boxed{a \in \{-9, 25, 107\}}$$

7. Ребро A_1A параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ перпендикулярно его грани $ABCD$. Сфера Ω касается рёбер $BB_1, B_1C_1, C_1C, CB, CD$, и при этом касается ребра CD в такой точке K , что $CK = 4, KD = 1$.

а) Найдите длину ребра A_1A .

б) Пусть дополнительно известно, что сфера Ω касается ребра A_1D_1 . Найдите объём параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ и радиус сферы Ω .

$$A_1A = 8; V = 256; R = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$