

Олимпиада «Физтех» по математике

10 класс, 2018 год, вариант 2

1. Даны 2117 карточек, на которых написаны натуральные числа от 1 до 2117 (на каждой карточке написано ровно одно число, притом числа не повторяются). Требуется выбрать две карточки, для которых сумма написанных на них чисел делится на 100. Сколькими способами это можно сделать?

98386

2. Даны две линейные функции $f(x)$ и $g(x)$ такие, что графики $y = f(x)$ и $y = g(x)$ — параллельные прямые, не параллельные осям координат. Известно, что график функции $y = (f(x))^2$ касается графика функции $y = 11g(x)$. Найдите все значения A такие, что график функции $y = (g(x))^2$ касается графика функции $y = Af(x)$.

11- = √ или 0 = √

3. Уравнение $x^2 + ax + 2 = 0$ имеет два различных корня x_1 и x_2 ; при этом

$$x_1^3 + \frac{14}{x_2} = x_2^3 + \frac{14}{x_1}.$$

Найдите все возможные значения a .

4 = a

4. Найдите количество различных приведённых квадратных трёхчленов (т. е. со старшим коэффициентом, равным 1) с целыми коэффициентами таких, что они имеют два *различных* корня, являющихся степенями числа 7 с *целыми неотрицательными* показателями, и при этом их коэффициенты по модулю не превосходят 343^{36} .

6967

5. Диагонали AC и BD четырёхугольника $ABCD$, вписанного в окружность, пересекаются в точке P . Известно, что расстояния от точки P до сторон AB , BC , CD , DA равны 4 , $\sqrt{3}$, $\frac{8}{\sqrt{19}}$ и $8\sqrt{\frac{3}{19}}$ соответственно (основания перпендикуляров, опущенных из точки P на стороны, лежат на этих сторонах).

а) Найдите отношение $AP : PC$.

б) Найдите длину диагонали BD , если дополнительно известно, что $AC = 10$.

61/35 (6) 4 : 1 : 4 (a)

6. Назовём *расстоянием* между числами модуль их разности. Известно, что сумма расстояний от двадцати последовательных *натуральных* чисел до некоторого числа a равна 4460, а сумма расстояний от этих же двадцати чисел до числа a^2 равна 2755. Найдите все возможные значения a .

7/63 = a или 7/27 = a

7. Дан параллелограмм $ABCD$. Окружность Ω с диаметром 13 описана вокруг треугольника ABM , где M — точка пересечения диагоналей данного параллелограмма. Ω вторично пересекает луч CB и отрезок AD в точках E и K соответственно. Длина дуги AE в два раза больше длины дуги BM (дуги AE и BM не имеют общих точек). Длина отрезка EM равна 12. Найдите длины отрезков BC , BK и периметр треугольника AKM .

$$BC = 13, BK = \frac{13}{20}, P_{AKM} = \frac{31}{10}$$