Олимпиада «Физтех» по математике

10 класс, 2018 год, вариант 1

1. Каких целых чисел от 1 до $8 \cdot 10^{20}$ (включительно) больше и на сколько: содержащих в своей записи только чётные цифры или содержащих в своей записи только нечётные цифры?

$\boxed{\text{Вторых на } \frac{5}{4}(5^{20}-1)}$

2. Даны две линейные функции $f(x)$ и $g(x)$ такие, что графики $y = f(x)$ и $y = g(x)$ — параллельные прямые, не параллельные осям координат. Найдите наименьшее значение функции $(g(x))^2 + 2f(x)$, если наименьшее значение функции $(f(x))^2 + 2g(x)$ равно 5.

$\boxed{-7}$

3. Уравнение $x^2 + ax + 5 = 0$ имеет два различных корня x_1 и x_2; при этом

$$x_1^2 + \frac{250}{19x_2^3} = x_2^2 + \frac{250}{19x_1^3}.$$

Найдите все возможные значения a.

$\boxed{a = 10}$

4. На каждой из прямых $x = 0$ и $x = 2$ отмечено по 62 точки с ординатами $1, 2, 3, \ldots, 62$. Сколькими способами можно выбрать три точки из отмеченных 124 так, чтобы они являлись вершинами прямоугольного треугольника?

$\boxed{7908}$

5. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ проведена диагональ BD, и в каждый из полученных треугольников ABD и BCD вписана окружность. Прямая, проходящая через вершину B и центр одной из окружностей, пересекает сторону DA в точке M. При этом $AM = \frac{8}{5}$ и $MD = \frac{12}{5}$. Аналогично, прямая, проходящая через вершину D и центр второй окружности, пересекает сторону BC в точке N. При этом $BN = \frac{30}{11}$ и $NC = \frac{25}{11}$.

а) Найдите отношение $AB : CD$.

б) Найдите длины сторон AB и CD, если дополнительно известно, что данные окружности касаются друг друга.

$\boxed{\text{а) } 4 : 5; \text{ б) } AB = 4,\ CD = 5}$

6. Назовём *расстоянием* между числами модуль их разности. Известно, что сумма расстояний от девяти последовательных *натуральных* чисел до некоторого числа a равна 294, а сумма расстояний от этих же девяти чисел до некоторого числа b равна 1932. Найдите все возможные значения a, если известно, что $a + b = 256$.

$\boxed{a = \frac{13}{3} \text{ или } a = \frac{755}{3}}$

7. В треугольнике ABC сторона AC равна 6, а угол ACB равен 120°. Окружность Ω радиуса $\sqrt{3}$ касается сторон BC и AC треугольника ABC в точках K и L соответственно и пересекает сторону AB в точках M и N (M лежит между A и N) так, что отрезок MK параллелен AC. Найдите длины отрезков CL, MK, AB и площадь треугольника ANL.

$\boxed{CL = 1,\ MK = 3,\ AB = 2\sqrt{13},\ S_{ANL} = \frac{125\sqrt{3}}{52}}$