

## Олимпиада «Физтех» по математике

## 9 класс, 2017 год, вариант 1

1. Когда к квадратному трёхчлену  $f(x)$  прибавили  $3x^2$ , его наименьшее значение увеличилось на 9, а когда из него вычли  $x^2$ , его наименьшее значение уменьшилось на 9. А как изменится наименьшее значение  $f(x)$ , если к нему прибавить  $x^2$ ?

Увеличится на  $\frac{9}{2}$

2. Решите неравенство  $|x^3 - 2x^2 + 2| \geq 2 - 3x$ .

$(-\infty; -1] \cup \left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$

3. Продолжение высоты  $BH$  треугольника  $ABC$  пересекает описанную около него окружность в точке  $D$  (точки  $B$  и  $D$  лежат по разные стороны от прямой  $AC$ ). Градусные меры дуг  $AD$  и  $CD$ , не содержащих точки  $B$ , равны  $60^\circ$  и  $90^\circ$  соответственно. Определите, в каком отношении отрезок  $BD$  делится стороной  $AC$ .

1 : 3

4. На координатной плоскости рассматриваются квадраты, все вершины которых имеют целые неотрицательные координаты, а центр находится в точке  $(60, 45)$ . Найдите количество таких квадратов.

2070

5. Известно, что одним из корней уравнения

$$x^2 - 4a^2b^2x = 4$$

является  $x_1 = (a^2 + b^2)^2$ . Найдите  $a^4 - b^4$ .

77

6. Найдите все значения параметра  $a$ , при которых система

$$\begin{cases} 4|x| + 3|y| = 12, \\ x^2 + y^2 - 2x + 1 - a^2 = 0 \end{cases}$$

а) имеет ровно три решения; б) имеет ровно два решения.

$\left\{\frac{1}{16}\sqrt{17}; \frac{9}{8}\right\} \cup \left(\frac{9}{16}; 2\right) \cup \left(2 - \frac{9}{16}; 9\right) \cup \left(9; 2\sqrt{17}\right)$

7. В треугольнике  $ABC$  проведена медиана  $BM$ ;  $MD$  и  $ME$  — биссектрисы треугольников  $AMB$  и  $CMB$  соответственно. Отрезки  $BM$  и  $DE$  пересекаются в точке  $P$ , причём  $BP = 2$ ,  $MP = 4$ .

а) Найдите отрезок  $DE$ .

б) Пусть дополнительно известно, что около четырёхугольника  $ADEC$  можно описать окружность. Найдите её радиус.

2