

Олимпиада «Физтех» по математике

11 класс, 2017 год, вариант 2

1. Известно, что для трёх последовательных натуральных значений аргумента квадратичная функция $f(x)$ принимает соответственно значения 6, 5 и 5. Найдите наименьшее возможное значение $f(x)$.

$\frac{8}{6E}$

2. Известно, что числа x, y, z образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию с разностью $\alpha = \arccos\left(-\frac{3}{7}\right)$, а числа $\frac{1}{\cos x}, \frac{7}{\cos y}, \frac{1}{\cos z}$ также образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию. Найдите $\cos^2 y$.

$\frac{E1}{01}$

3. Решите неравенство

$$\log_9 4 + (16 - \log_3^2 2) \log_{162} 3 \leq 64^{\log_4^2 x} - 15 \cdot x^{\log_4 x}.$$

$(\infty + ; \frac{7}{4}] \cap [\frac{E}{7} ; 0)$

4. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность радиуса 7. Лучи AB и DC пересекаются в точке P , а лучи BC и AD пересекаются в точке Q . Известно, что треугольники ADP и QAB подобны (вершины не обязательно указаны в соответствующем порядке).

а) Найдите AC .

б) Пусть дополнительно известно, что окружности, вписанные в треугольники ABC и ACD , касаются отрезка AC в точках K и T соответственно, причём $CK : KT : TA = 6 : 1 : 7$ (точка T лежит между K и A). Найдите $\angle DAC$ и площадь четырёхугольника $ABCD$.

а) $14; 6) 45^\circ$ и 97

5. Дано число 5300...0035 (100 нулей). Требуется заменить некоторые два нуля на ненулевые цифры так, чтобы после замены получилось число, делящееся на 495. Сколькими способами это можно сделать?

22100

6. Найдите все значения параметра a , при которых существует значение параметра b такое, что система

$$\begin{cases} \arcsin\left(\frac{a-y}{3}\right) = \arcsin\left(\frac{4-x}{4}\right), \\ x^2 + y^2 - 8x - 8y = b \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

$\left(\frac{E}{2E}; \frac{E}{E1} - \right)$
--

7. Рассматриваются четырёхугольные пирамиды $MABCD$ со следующими свойствами: основание пирамиды — выпуклый четырёхугольник $ABCD$, в котором $AB = BC = 1$, $CD = DA = 2$, а каждая из плоскостей боковых граней MAB , MBC , MCD , MDA составляет угол 45° с плоскостью основания.

- а) Найдите объём такой пирамиды, если её высота, опущенная из вершины M , равна $\frac{9}{5}$.
- б) При какой длине высоты объём рассматриваемых пирамид максимален и чему равен этот объём?

а) $\frac{27}{4}$; б) $\frac{25}{4}$