

Олимпиада «Физтех» по математике

10 класс, 2017 год, вариант 2

1. Известно, что для трёх последовательных натуральных значений аргумента квадратичная функция $f(x)$ принимает соответственно значения 6, 5 и 5. Найдите наименьшее возможное значение $f(x)$.

$\frac{8}{63}$

2. Решите неравенство

$$\sqrt{\frac{|x| - 12}{2 - x}} > x.$$

$(8; 2) \cap [21; \infty)$

3. Найдите количество пар целых чисел (a, b) таких, что $1 \leq a \leq 70$, $1 \leq b \leq 50$, и при этом площадь S фигуры, заданной системой неравенств

$$\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \geq 1, \\ x \leq a, \\ y \leq b, \end{cases}$$

такова, что число $2S$ кратно 5.

1261

4. В треугольнике ABC известно, что $AB = 3$, $AC = 4$, $\angle BAC = 60^\circ$. Продолжение биссектрисы AA_1 пересекает окружность, описанную около треугольника ABC , в точке A_2 . Найдите площади треугольников OA_2C и A_1A_2C (O — центр окружности, описанной около треугольника ABC).

$\frac{12}{13\sqrt{3}}$ и $\frac{21}{13\sqrt{3}}$

5. Дано число $5300\dots 0035$ (100 нулей). Требуется заменить некоторые два нуля на ненулевые цифры так, чтобы после замены получилось число, делящееся на 495. Сколькими способами это можно сделать?

22100

6. Лучи AB и DC пересекаются в точке P , а лучи BC и AD пересекаются в точке Q . Известно, что треугольники ADP и QAB подобны (вершины не обязательно указаны в соответствующем порядке), а четырёхугольник $ABCD$ можно вписать в окружность радиуса 7.

а) Найдите AC .

б) Пусть дополнительно известно, что окружности, вписанные в треугольники ABC и ACD , касаются отрезка AC в точках K и T соответственно, причём $CK : KT : TA = 6 : 1 : 7$ (точка T лежит между K и A). Найдите $\angle DAC$ и площадь четырёхугольника $ABCD$.

а) $14; 6; 45^\circ$ и 97

7. Изобразите на плоскости фигуру Φ , состоящую из точек (x, y) координатной плоскости таких, что выполнена система неравенств

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - 3y^2 + 4x + 4} \leq 2x + 1, \\ x^2 + y^2 \leq 4. \end{cases}$$

Определите, из скольких частей состоит фигура Φ .