

## Олимпиада «Физтех» по математике

10 класс, 2016 год, вариант 3

1. Известно, что  $\operatorname{tg}(2\alpha + \beta) + 6 \operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{tg} \beta = 0$  и  $\operatorname{tg} \alpha = 2$ . Найдите  $\operatorname{ctg} \beta$ .

$\frac{2}{1}$  или  $1$

2. Решите неравенство

$$4x^2 + x + 9 > 2|4x - 2\sqrt{x} + 3| + 4x\sqrt{x}.$$

$(\infty + \frac{1}{6}) \cap (1; 0]$

3. В числе  $2*0*1*6*02*$  нужно заменить каждую из 5 звёздочек на любую из цифр 0, 2, 4, 7, 8, 9 (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 11-значное число делилось на 12. Сколькими способами это можно сделать?

9671

4. Изобразите на плоскости  $(x, y)$  множество точек, удовлетворяющих уравнению

$$|3x| + |4y| + |48 - 3x - 4y| = 48,$$

и найдите площадь полученной фигуры.

96

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2y - xy^2 - 3x + 3y + 1 = 0, \\ x^3y - xy^3 - 3x^2 + 3y^2 + 3 = 0. \end{cases}$$

(1; 2)

6. Равнобедренный треугольник  $PQT$  с основанием  $PQ$  вписан в окружность  $\Omega$ . Хорды  $AB$  и  $CD$ , параллельные прямой  $PQ$ , пересекают сторону  $QT$  в точках  $L$  и  $M$  соответственно, и при этом  $QL = LM = MT$ . Найдите радиус окружности  $\Omega$  и площадь треугольника  $PQT$ , если  $AB = 2\sqrt{14}$ ,  $CD = 2\sqrt{11}$ , а центр  $O$  окружности  $\Omega$  расположен между прямыми  $AB$  и  $CD$ .

$81 \frac{1}{9}$