

Олимпиада «Физтех» по математике

10 класс, 2016 год, вариант 1

1. Найдите все значения p , при каждом из которых числа $4p + 5$, $2p$ и $|p - 3|$ являются соответственно первым, вторым и третьим членами некоторой геометрической прогрессии.

$\frac{8}{15}; 1$

2. Найдите значение выражения

$$\cos^4 \frac{5\pi}{24} + \cos^4 \frac{11\pi}{24} + \sin^4 \frac{13\pi}{24} + \sin^4 \frac{19\pi}{24}.$$

$\frac{7}{8}$

3. В числе $2*0*1*6*0*2*$ нужно заменить каждую из 6 звёздочек на любую из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 12-значное число делилось на 45. Сколькими способами это можно сделать?

13122

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + \sqrt{x + 2y} - 2y = \frac{7}{2}, \\ x^2 + x + 2y - 4y^2 = \frac{27}{2}. \end{cases}$$

$(\frac{8}{17}; \frac{7}{19})$

5. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (|y + 9| + |x + 2| - 2)(x^2 + y^2 - 3) = 0, \\ (x + 2)^2 + (y + 4)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно три решения.

$9; 23 + 4\sqrt{15}$

6. Вокруг равнобедренного остроугольного треугольника NPQ с основанием NQ описана окружность Ω . Точка F — середина дуги PN , не содержащей точки Q . Известно, что расстояния от точки F до прямых PN и QN равны соответственно 5 и $20/3$. Найдите радиус окружности Ω и площадь треугольника NPQ .

$\frac{9}{35\sqrt{35}}; 9$
