Олимпиада «Физтех» по математике

11 класс, 2015 год, вариант 3

1. Решите уравнение
$$x^{\log_2\left(0{,}25x^3\right)} = 512x^4.$$

$\frac{1}{2}$, 8

2. Решите уравнение
$$\frac{1}{2}\left|\cos 2x + \frac{1}{2}\right| = \sin^2 x + \sin x \sin 5x.$$

$\pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$

3. Найдите количество натуральных чисел k, не превосходящих 333300 и таких, что $k^2 - 2k$ делится нацело на 303.

4400

4. Решите систему
$$\begin{cases} 2x + y + 8 \leqslant 0, \\ x^4 + 2x^2y^2 + y^4 + 9 - 10x^2 - 10y^2 = 8xy. \end{cases}$$

$(-3, -2)$

5. На ребре SA правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ с вершиной S отмечена точка K такая, что $AK : KS = 1 : 4$. Точка K является вершиной прямого кругового конуса, на окружности основания которого лежат три вершины пирамиды $SABCD$.

а) Найдите отношение $DS : BC$.

б) Пусть дополнительно известно, что высота пирамиды $SABCD$ равна 5. Найдите объём конуса.

а) $\frac{2}{\sqrt{3}}$; б) $\frac{64\pi}{\sqrt{15}}$

6. Найдите все значения параметра b, для каждого из которых найдётся число a такое, что система
$$\begin{cases} y = b - x^2, \\ x^2 + y^2 + 2a^2 = 4 - 2a(x + y) \end{cases}$$
имеет хотя бы одно решение (x, y).

$\left[-2\sqrt{2} - \frac{1}{4}; +\infty\right)$

7. В углы C и B треугольника ABC вписаны соответственно окружности с центрами O_1 и O_2 равного радиуса, точка O — центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Данные окружности касаются стороны BC вточках K_1, K_2 и K соответственно, при этом $CK_1 = 3$, $BK_2 = 7$ и $BC = 16$.

а) Найдите длину отрезка CK.

б) Пусть окружность с центром O_1 касается стороны AC в точке K_3. Найдите угол ACB, если известно, что точка O_1 является центром окружности, описанной около треугольника OK_1K_3.

а) $\frac{24}{5}$; б) $2\arcsin\frac{3}{5} = \arccos\frac{7}{25}$