Олимпиада «Физтех» по математике

11 класс, 2015 год, вариант 2

1. Решите неравенство

$$\frac{125+\left(\log_{\frac{1}{2}} x^4\right)^3}{\log_2 x^4\cdot\log_2 x^2+6\log_{\frac{1}{2}} x^4+17\log_2 x^2-3}\geqslant 0.$$

$\boxed{\left[-2\sqrt[4]{2};-\sqrt[4]{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}};0\right)\cup\left(0;\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)\cup\left(\sqrt[4]{2};2\sqrt[4]{2}\right]}$

2. Решите уравнение

$$\left(\frac{7}{4}-2\cos 2x\right)|2\cos 2x+1|=\cos x(\cos x-\cos 5x).$$

$\boxed{\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2},\ n\in\mathbb{Z}}$

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y+z}=\dfrac{1}{12}\,,\\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x+z}=\dfrac{1}{6}\,,\\ \dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x+y}=\dfrac{1}{2}\,.\end{cases}$$

$\boxed{(-4,2,1)}$

4. На стороне BC треугольника ABC взята точка M такая, что $BM:MC=2:7$. Биссектриса BL данного треугольника и отрезок AM пересекаются в точке P под углом 90°.

а) Найдите отношение площади треугольника ABP к площади четырёхугольника $LPMC$.

б) На отрезке MC отмечена точка T такая, что $MT:TC=1:6$. Пусть дополнительно известно, что прямые LT и BC перпендикулярны. Найдите угол CBL.

$\boxed{\text{а) } 11:70;\ \text{б) } \arccos\frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{3}}}$

5. Найдите количество пар целых чисел (x,y), удовлетворяющих условию $6x^2-7xy+y^2=10^{100}$.

$\boxed{19998}$

6. Найдите все значения параметра b, для каждого из которых найдётся число a такое, что система

$$\begin{cases}x^2+y^2+2b(b-x+y)=4,\\ y=5\cos(x-a)-12\sin(x-a)\end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение (x,y).

$\boxed{[-15;15]}$

7. В основании четырёхугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит ромб $ABCD$, в котором $CD = 3$ и $\angle ABD = 30^\circ$. Сфера проходит через вершины D, C, B, B_1, A_1, D_1.

а) Найдите площадь круга, полученного в сечении сферы плоскостью, проходящей через точки A, C и D.

б) Найдите угол C_1AB.

в) Пусть дополнительно известно, что радиус сферы равен 6. Найдите объём призмы.

а) 9π; б) 90°; в) 81