Олимпиада «Физтех» по математике

10 класс, 2015 год, вариант 2

1. Решите неравенство $\sqrt{x^2-25}\cdot\sqrt{-2x-1}\leqslant x^2-25$.

$(-\infty;-6]\cup\{-5\}$

2. Дана функция $g(x)=\frac{4\sin^4x+5\cos^2x}{4\cos^4x+3\sin^2x}$. Найдите:

а) корни уравнения $g(x)=\frac{7}{5}$;
б) наибольшее и наименьшее значения функции $g(x)$.

а) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\ \pm\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{55}{39}$ и $\frac{5}{4}$

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y+z}=-\dfrac{2}{15},\\[2mm] \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x+z}=-\dfrac{2}{3},\\[2mm] \dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x+y}=-\dfrac{1}{4}.\end{cases}$$

$(5,-1,-2)$

4. На стороне BC треугольника ABC взята точка M такая, что $BM:MC=2:5$. Биссектриса BL данного треугольника и отрезок AM пересекаются в точке P под углом 90°.

а) Найдите отношение площади треугольника ABP к площади четырёхугольника $LPMC$.

б) На отрезке MC отмечена точка F такая, что $MF:FC=1:4$. Пусть дополнительно известно, что прямые LF и BC перпендикулярны. Найдите угол CBL.

а) $9:40$; б) $\arccos\frac{3\sqrt{21}}{14}$

5. Найдите количество пар целых чисел (x,y), удовлетворяющих условию $5x^2-6xy+y^2=6^{100}$.

19594

6. Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся число b такое, что система

$$\begin{cases}x^2+y^2+2a(a+y-x)=49,\\ y=\dfrac{8}{(x-b)^2+1}\end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение (x,y).

$[-15;7)$