

Олимпиада «Физтех» по математике

2010 год, вариант 2

1. Решите неравенство

$$\log_{x+2}(\sqrt{x+3} + 1) \leq 1.$$

$$(\infty+; 1] \cap (1-; 2-)$$

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{25-x^2} - \sqrt{25-y^2} = 1, \\ \sqrt{25-x^2} + \sqrt{25-y^2} = y^2 - 2x^2 + 2x + 3. \end{cases}$$

$$\left(\sqrt{9}, \sqrt{2}, -1, -1 \right), \left(\sqrt{9}, \sqrt{4}, 2, -1 \right), \left(3, -4 \right), \left(3, -4 \right)$$

3. Решите уравнение

$$\sin 3x + 3|\sin x| = \cos 4x - \cos 2x.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, u\pi + \frac{\pi}{2}, u\pi$$

4. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания $ABCD$ равна $\sqrt{2}$, высота SO равна 2. Точка K лежит на высоте SO , причём $KS : KO = 1 : 3$. Через точку K проведена плоскость Π , перпендикулярная прямой SA . Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью Π , расстояние от точки D до плоскости Π и угол между плоскостью Π и прямой SD .

$$\frac{3}{4} \sin \alpha, \frac{3}{3}, \frac{3}{1}$$

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x + \sqrt{2} \cos y = \frac{3}{2}, \\ \sqrt{2} \sin y + \sqrt{3} \cos x = \frac{5}{2}. \end{cases}$$

$$\mathbb{Z} \ni u, k, u\pi + \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}$$

6. В трапецию $ABCD$ можно вписать окружность. Длины её боковых сторон AB и CD равны соответственно 3 и 5, а длина основания AD больше длины BC . Средняя линия трапеции делит её на две части, отношение площадей которых равно $5/11$. Найдите радиус вписанной в трапецию окружности и длины её диагоналей.

$$\frac{3}{92} \sqrt{2}, \frac{3}{10} \sqrt{2}, \frac{3}{14} \sqrt{2}$$