

## Олимпиада «Физтех» по математике

2009 год, вариант 2

1. Решите уравнение

$$\frac{\cos 3x}{\sin 3x - 2 \sin x} = \operatorname{tg}^2 x.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, ux + \frac{v}{x}$$

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{4x^2 + \sqrt{9x^2 - y^2}} = \frac{3}{4} + 2x, \\ \sqrt{\frac{15}{16} + 6x - \frac{4}{3}y} = 1 + \frac{4}{3}y. \end{cases}$$

$$\left(\frac{91}{3}, \frac{84}{5}\right)$$

3. Решите неравенство

$$\log_{|x|}(\sqrt{x+5} + 4) \geq 2 \log_{x^2}(2x+8).$$

$$(1;0) \cap (0;1) \cap (1;4)$$

4. В основании прямой призмы  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  лежит трапеция  $ABCD$ , в которой  $AB = BC = CD = 2$ ,  $AD = 4$ . Точки  $K, L, M$  лежат на отрезках  $A_1 B, B_1 C, C_1 D$  соответственно так, что

$$\frac{A_1 K}{KB} = \frac{B_1 L}{LC} = \frac{C_1 M}{MD} = 7.$$

Сфера радиуса  $R = 2$  касается прямых  $A_1 B, B_1 C, C_1 D$  в точках  $K, L, M$  соответственно. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника  $KLM$ , расстояние от центра сферы до плоскости  $KLM$  и объём призмы.

$$\frac{1}{8} \sqrt{81}; \frac{1}{2} \sqrt{2}; \frac{1}{2} \sqrt{2}$$

5. В треугольнике  $ABC$  точка  $D$  лежит на стороне  $AC$ , а точка  $E$  лежит на отрезке  $AD$ . Известно, что углы  $ABE, DBE$  и  $CBD$  равны, а длина отрезка  $DE$  вдвое меньше длины отрезка  $CD$  и втрое меньше длины отрезка  $AE$ . Найдите углы  $ABE$  и  $ACB$ .

$$\angle ABE = 45^\circ, \angle ACB = \arcsin \frac{2}{3}$$

6. Найдите, при каких значениях параметра  $a$  система уравнений

$$\begin{cases} x^2 - y + a = 0, \\ x + y^2 + a = 0. \end{cases}$$

имеет единственное решение.

$$\frac{1}{2}$$

7. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x^2 = yz + 2x, \\ 2y^2 = xz + 2y, \\ 2z^2 = xy + 2z. \end{cases}$$

$$\left( \frac{1}{2}, -\frac{1}{9}, \frac{1}{9} \right); \left( \frac{1}{9}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{9} \right); \left( \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{2} \right); (2, 2, 2); (1, 0, 0); (0, 1, 0); (0, 0, 1); (0, 0, 0)$$