Олимпиада «Физтех» по математике

2008 год

1. Решите неравенство

$$\log_{\frac{2-x}{1-x}}(4-x) \leqslant 2.$$

$\boxed{\left[0; 1\right) \cup \left(2; \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right]}$

2. Решите уравнение

$$\frac{\sin^3 x \cos 3x + \cos^3 x \sin 3x}{|\sin 2x|} = \frac{3}{4}.$$

$\boxed{\frac{\pi}{6} + \pi n,\ -\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}}$

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + \sqrt{\dfrac{x}{x+y}} = \dfrac{42}{x+y}, \\ xy - x = 16. \end{cases}$$

$\boxed{(4; 5),\ \left(\frac{-1-\sqrt{133}}{2}, \frac{41-8\sqrt{133}}{33}\right)}$

4. В треугольнике ABC медиана BM равна 2, угол ABM равен $\operatorname{arctg}\frac{2}{3}$, угол CBM равен $\operatorname{arctg}\frac{1}{5}$. Найти стороны AB, BC и биссектрису BE треугольника ABC.

$\boxed{AB = \frac{4}{\sqrt{13}},\ BC = \frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{13}},\ BE = \frac{8\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{\sqrt{13}(1+2\sqrt{2})}}$

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + y^4 - 2y^2 = \ln x, \\ 2\operatorname{arctg} x + \arcsin y = 0. \end{cases}$$

$\boxed{(1, -1)}$

6. В основании пирамиды $SABCD$ лежит параллелограмм $ABCD$. Сфера ω радиуса $\frac{15}{14}$ с центром O касается рёбер AS, BS, AD, BC пирамиды $SABCD$ соответственно в точках K, L, M, N, пересекает ребро AB в точках P и Q и касается грани CDS. Известно, что прямая SO перпендикулярна плоскости $ABCD$ и пересекает её в точке H; $\frac{AB}{PQ} = \frac{4}{\sqrt{7}}$, $\frac{AS}{LS} = \frac{3}{2}$. Найти углы SAB и SBH, высоту пирамиды и её объём.

$\boxed{\arccos\frac{4}{9} \text{ и } \arccos\frac{5}{9};\ h = 2;\ V = \frac{64}{21}}$