Олимпиада «Физтех» по математике

2013 год, вариант 1

1. Решите уравнение

$$\log_{3^{x-1}}\left(x^2-11x+19\right)+\log_{27^{x-1}}x^3=\frac{2}{x-1}\,.$$

2. Решите неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{|x+1|-2}}\leqslant\frac{1}{9+x}\,.$$

3. Решите уравнение

$$\sqrt{3+4\cos^2 x}=\frac{\sin x}{\sqrt{3}}+3\cos x.$$

4. Число 72350 написали семь раз подряд, при этом получилось 35-значное число

$$72350723507235072350723507235072350.$$

Из этого 35-значного числа требуется вычеркнуть две цифры так, чтобы полученное после вычёркивания 33-значное число делилось на 15. Сколькими способами это можно сделать?

5. В параллелограмме $ABCD$ угол ADC равен $\arcsin\frac{\sqrt{24}}{5}$. Окружность Ω, проходящая через точки A, C и D, пересекает стороны AB и BC в точках N и L соответственно, причём $AN=11$, $BL=6$. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$ и радиус окружности Ω.

6. При каких значениях параметра a существует единственная пара чисел (x,y), удовлетворяющая системе неравенств

$$\begin{cases}\left(x^2-xy+y^2\right)\left(x^2-36\right)\geqslant 0,\\ |x-2+y|+|x-2-y|\leqslant a\,?\end{cases}$$

7. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой $BC=2\sqrt{3}$. Сфера ω касается плоскости основания пирамиды и касается всех трёх её боковых рёбер в их серединах. Пусть Ω — сфера, описанная около пирамиды $SABC$.

а) Найдите расстояние между центрами сфер ω и Ω.

б) Найдите отношение радиусов сфер ω и Ω.

в) Пусть дополнительно известно, что $\angle SAB=\arccos\frac{1}{4}$. Найдите объём пирамиды $SABC$.

8. Дан правильный 18-угольник. Найдите количество троек его вершин, являющихся вершинами треугольника, в котором хотя бы один угол равен 40°. (Две тройки вершин, отличающиеся порядком вершин, считаются одинаковыми.)

Ответы

1. 9.

2. $(-9; -7]$.

3. $\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

4. 216.

5. $S = 60\sqrt{6}$, $R = \frac{5\sqrt{265}}{4\sqrt{6}}$.

6. $4 \leqslant a < 8$.

7. а) 0; б) $1 : 2$; в) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

8. 216.