Олимпиада «Физтех» по математике

2011 год, вариант 1

1. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} \sqrt{x^2-2y}=3y-x, \\ \dfrac{81}{4}y^2+x^3=2x+1. \end{cases}$$

2. Решите уравнение
$$\log_{\operatorname{tg} x}(\operatorname{ctg} x-2)+\log_{(\operatorname{ctg} x-2)}\sqrt{\operatorname{tg} x}=\frac{3}{2}\,.$$

3. Решите неравенство
$$\frac{10-2|x|}{|x^2+9x+11|-3}\leqslant 1.$$

4. В параллелограмме $ABCD$ окружность радиуса $1/4$ с центром на отрезке CD проходит через точку D и касается отрезка BC в точке E такой, что угол BED равен $\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$. Найдите высоту параллелограмма DF, проведённую к стороне BC, и длину отрезка CD. Найдите площадь параллелограмма, если $AB=BE$.

5. Найдите все значения параметра b, для каждого из которых существует число α, такое, что уравнение
$$x^2+(\sin\alpha+3\cos\alpha)x+b=0$$
имеет действительное решение.

6. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания ABC равна 1, боковое ребро равно 2. Сфера с центром O на прямой SA касается рёбер SB, SC и BC. Найдите расстояния от центра сферы до плоскостей BSC и ABC, а также радиус сферы.

Ответы

1. $(-1,0)$, $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2},0\right)$, $\left(\frac{\sqrt{113}-9}{2}, \frac{3\sqrt{113}-29}{9}\right)$.

2. $\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}-1\right)+\pi k$, $\operatorname{arctg}\frac{3-\sqrt{5}}{2}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

3. $(-\infty;-8)\cup(-7;-3]\cup(-2;-1)\cup\left[\frac{\sqrt{129}-11}{2};+\infty\right)$.

4. $DF=8/25$, $CD=8/7$, $S=16/25$.

5. $\left(-\infty;\frac{5}{2}\right]$.

6. $\rho(O,BSC)=\frac{2}{7}\sqrt{\frac{33}{5}}$, $\quad\rho(O,ABC)=\frac{1}{7}\sqrt{\frac{11}{3}}$, $\quad R=\frac{3\sqrt{15}}{14}$.