

## Олимпиада «Физтех» по математике

10 класс, онлайн-этап, 2013/14 год

1. Сколько одинаковых членов находится среди первых 2000 членов арифметических прогрессий  $9, 11, 13, \dots$  и  $3, 8, 13, \dots$ ?
2. На столе рубашкой вверх была разложена колода из 36 игральных карт. Лёша перевернул 30 карт, затем Макс перевернул 19 карт, а после этого Боря — 21 карту. В результате вся колода оказалась рубашкой вниз. Сколько карт было перевернуто трижды?
3. Последовательность  $a_n$  такова, что  $a_1 = 4$ ,  $a_2 = 25$ . Найдите  $a_{200}$ , если для любого натурального  $n$  справедливо равенство  $a_{n+1} = a_n \cdot a_{n+2}$ .
4. Найдите сумму всех трёхзначных чисел, в записи которых содержится ровно две цифры 4.
5. Известно, что  $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = 8$ , а  $\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = 40$ . Найдите  $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$ .
6. При каком значении параметра  $a$  значение выражения  $x_1^2 + x_2^2$  будет наименьшим, если  $x_1$  и  $x_2$  — корни уравнения  $x^2 + ax + a - 2 = 0$ ?
7. Какая наибольшая площадь может быть у треугольника, если длины двух его медиан равны 12 и 17, а угол между ними равен  $150^\circ$ ?
8. Натуральное число имеет ровно два простых делителя. Его квадрат имеет 85 различных натуральных делителей. Какое наибольшее количество различных натуральных делителей может иметь куб этого числа?
9. Длины сторон треугольника  $ABC$  равны 13, 22 и 27.  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  — его медианы, а  $AA_2$ ,  $BB_2$  и  $CC_2$  — его высоты. Найдите длину замкнутой ломаной  $A_1B_2C_1A_2B_1C_2A_1$ .
10. Какое наибольшее значение может быть у наибольшего общего делителя чисел  $13n + 6$  и  $17n + 1$ , если  $n$  — натуральное число?
11. Трапеция  $ABCD$  с основаниями  $BC = 6$  и  $AD = 7$  вписана в окружность. Продолжение средней линии  $MN$  трапеции за точку  $M$  пересекает окружность в точке  $K$ . Найдите квадрат высоты трапеции, если  $MK = 1$ .
12. Сколько всего 23-значных чисел, сумма цифр которых равна четырём?
13. Дан выпуклый 15-угольник, никакие три диагонали которого не имеют общих точек, отличных от вершин. Найдите число точек пересечения диагоналей (не считая вершин).
14. Какое наибольшее значение может принимать знаменатель геометрической прогрессии  $b_1, b_2, \dots$ , если число 5 является корнем уравнения  $b_{10}x^9 + \dots + b_3x^2 + b_2x + b_1 = 0$ ?
15. В равнобедренный треугольник  $ABC$  ( $AB = BC$ ) вписана окружность. Через точку  $D$ , лежащую на стороне  $AB$ , проведена касательная к окружности, пересекающая прямую  $AC$  за точкой  $C$  в точке  $E$ . Найдите длину боковой стороны треугольника  $ABC$ , если  $AC = 21$ ,  $CE = 35$  и  $BD = AB/8$ .

- 16.** На сторонах  $AB$  и  $AD$  квадрата  $ABCD$  со стороной 12 отмечены точки  $E$  и  $F$  соответственно. Угол  $ECF$  равен  $60^\circ$ . Из вершин  $B$  и  $D$  проведены перпендикуляры к отрезкам  $CE$  и  $CF$ . Какая наибольшая площадь может быть у четырёхугольника с вершинами в основаниях этих перпендикуляров?
- 17.** На клетчатой бумаге по линиям сетки выделили прямоугольник  $10 \times 15$  клеток. В нём отметили все узлы, в том числе и лежащие на его границе. Какое наибольшее число отмеченных узлов можно выбрать так, чтобы никакие три из них не являлись вершинами прямоугольного треугольника?
- 18.** Из начала координат проведено 240 лучей, которые делят координатную плоскость на углы в  $1,5^\circ$ . Известно, что четыре из них совпадают с координатными полуосями. Найдите сумму абсцисс точек пересечения этих лучей с прямой  $y = 30 - x$ .
- 19.** На плоскости нарисован круг и три семейства прямых: в одном — 18 параллельных между собой прямых, в другом — 27 параллельных между собой прямых, в третьем — 32 параллельных между собой прямых. На какое наибольшее число частей прямые могут разбить круг?
- 20.** В турнире участвовали 377 теннисистов. Все игры проходили на одном корте. Спортсмен, проигравший хотя бы одну игру, выбывает из турнира. Известно, что у участников каждой встречи количество предыдущих побед отличалось не более чем на одну. Какое наибольшее число игр мог сыграть победитель турнира?

## Отвѣты

1. 400.
2. 17.
3. 25.
4. 12499.
5. 10.
6. 1.
7. 68.
8. 175.
9. 62.
10. 89.
11. 29,75.
12. 2300.
13. 1365.
14.  $-0,2$ .
15. 14,4.
16. 54.
17. 25.
18. 1785.
19. 2004.
20. 12.