Олимпиада «Физтех» по математике

8 класс, онлайн-этап, 2017/18 год

1. Известно, что $\frac{a}{b+c-3a}=\frac{b}{a+c-3b}=\frac{c}{a+b-3c}$. Найдите все возможные различные значения выражения $\frac{2b}{a}+\frac{2c}{a}+\frac{5a}{b}+\frac{5c}{b}$. В ответ запишите сумму найденных значений.

2. В строчку подряд записали двузначные числа от 25 до 34 включительно. Потом в получившемся 20-значном числе вычеркнули ровно половину цифр (не меняя порядка оставшихся цифр). Какое **наименьшее** число при этом могло получиться?

3. Вычислите значение выражения

$$\left(1+\frac{1}{7^2-1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{8^2-1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{9^2-1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{197^2-1}\right)$$

(ответ округлите до тысячных).

4. Витя и Саша решили пробежать стометровку. На середине дистанции сидела собака. В момент старта ребят собака побежала им навстречу. Добежав до Вити, она сразу развернулась и побежала за Сашей, догнав его на самом финише. Известно, что скорость Саши равна 412,5 м/мин. Найдите скорость Вити в м/мин, если известно, что скорость собаки в полтора раза больше скорости одного из ребят. (Скорости обоих мальчиков и собаки были постоянны.)

5. Найдите **наименьшее** натуральное x, при котором из того, что $10m+3n$ делится на 17, следует, что $13m+xn$ также делится на 17 (m и n — натуральные).

6. В треугольник ABC вписана окружность с центром O. Касательная к окружности, параллельная прямой AO, пересекает сторону AC в точке P. Найдите длину отрезка AP, если $BC=17$, $AO=7$.

7. В параллелограмме $ABCD$ угол при вершине A равен 60°, а биссектрисы углов A и D пересекаются на стороне BC. Найдите длину AC, если периметр параллелограмма $ABCD$ равен $21\sqrt{7}$.

8. Найдите количество целочисленных решений $(x;y;z)$ уравнения $4^x\cdot 18^y\cdot 3^z=12$, удовлетворяющих условию $|x+y+z|\leqslant 38$.

9. В футбольном турнире, проходящем в один круг (каждая команда должна сыграть с каждой ровно по одному разу), играют 20 команд. В некоторый момент турнира тренер команды A заметил, что любые две команды, отличные от A, сыграли разное количество игр. Какое **наименьшее** количество игр к этому моменту могла сыграть команда A?

10. В королевстве 18 городов. Некоторые из них соединены прямыми авиарейсами. Известно, что если между городами A и B есть прямой авиарейс, и между городами B и C есть прямой авиарейс, то между городами A и C нет прямого авиарейса. Какое **наибольшее** количество прямых авиарейсов может быть в королевстве?