

## Олимпиада «Физтех» по математике

7 класс, онлайн-этап, 2017/18 год

1. В строчку подряд записали двузначные числа от 21 до 30 включительно. Потом в получившемся 20-значном числе вычеркнули ровно половину цифр (не меняя порядка оставшихся цифр). Какое **наибольшее** число при этом могло получиться?
2. На доске написаны числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Разрешается выбрать любые два числа  $x$  и  $y$ , стереть их, и записать вместо них на доску числа  $x - 1$  и  $y + 3$ . Через 120 таких операций на доске оказались числа 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,  $N$  (записанные в некотором порядке). Найдите **наибольшее** число  $N$ , для которого такое могло получиться.
3. У двух химиков — Петрова и Иванова — есть по колбе с раствором спирта. В каждой колбе налито 200 г раствора. Вначале Петров перелил половину раствора из своей колбы в колбу Иванова, затем Иванов перелил третью часть раствора из своей колбы (с учетом раствора, добавленного Петровым) в колбу Петрова. Затем Петров перелил четверть раствора из своей колбы в колбу Иванова, затем Иванов перелил пятую часть и т. д. Сколько граммов раствора будет в колбе Петрова после 39-го переливания?
4. Витя и Саша решили пробежать стометровку. На середине дистанции сидела собака. В момент старта ребят собака побежала им навстречу. Добежав до Вити, она сразу развернулась и побежала за Сашей, догнав его на самом финише. Известно, что скорость Саши равна 405 м/мин. Найдите скорость Вити в м/мин, если известно, что скорость собаки в полтора раза больше скорости одного из ребят. (Скорости обоих мальчиков и собаки были постоянны.)
5. Вася записал в тетрадь целые числа  $x, y, z$ . А Петя в свою тетрадь записал числа  $x - 3, y + 3, z^2$ . Оказалось, что три числа, записанные Васей, совпали с тремя числами, записанными Петей. Найдите значение выражения  $x^2 + y^2 + z^2$ , если  $x + y + z = 513$ .
6. На доску написали число 1234567654. С написанным числом разрешается проделывать следующую операцию. У числа выбираются две соседние ненулевые цифры, из каждой вычитается по единице и выбранные цифры меняются местами (например, 1234567654  $\rightarrow$  1234547654). Какое **наименьшее** число может быть получено в результате таких операций?
7. Найдите количество треугольников с целыми сторонами, наибольшая из которых имеет длину 201, а одна из биссектрис треугольника перпендикулярна одной из его медиан.
8. В классе 50 детей. Они встали в круг и договорились, что некоторые из них на любой вопрос будут отвечать только правду, а остальные — только неправду. Каждому из них задали два вопроса: «Кто стоит слева от тебя — мальчик или девочка» и «Кто стоит справа от тебя — мальчик или девочка». Какое **наибольшее** количество из этих 100 ответов могло быть «Мальчик», если известно, что среди ответов был хотя бы один ответ «Девочка»?
9. На доске написано 2017-значное число  $A$ . Определите, какая цифра стоит на 37 месте слева, если известно, что каждое двузначное число, образованное парой соседних цифр, делится либо на 17, либо на 23, а последняя цифра числа  $A$  равна 1.

**10.** В школе проводился турнир по настольному теннису, в котором играли 35 участников. Турнир закончился, когда еще не все участники сыграли друг с другом. При этом оказалось, что среди любых четырех участников турнира можно было выбрать одного, сыгравшего с остальными тремя. Каким могло быть **наименьшее** число участников, каждый из которых сыграл со всеми остальными участниками турнира?