

Олимпиада «Физтех» по математике

11 класс, онлайн-этап, 2017/18 год

1. Две параболы $y = x^2 + ax + b$ и $y = -3x^2 + cx + d$ касаются в точке, лежащей на оси Ox . Через точку D — вторую точку пересечения первой параболы с осью Ox — проведена вертикальная прямая, пересекающая вторую параболу в точке A , а общую касательную к параболам — в точке B . Найдите отношение $DA : DB$.

4

2. Внутри угла ABC , меньшего 135° , взяты точки M и N так, что $\angle ABM = \angle MBN = \angle NBC$, $AM \perp BM$ и $AN \perp BN$. Прямая MN пересекает луч BC в точке K . Найдите BN , если $BM = 24$, $BK = 3$.

4

3. Найдите количество целочисленных решений $(a; b; c)$ уравнения $150^a \cdot \left(\frac{200}{3}\right)^b \cdot 2250^c = 15000$, удовлетворяющих условию $|a + b + c| \leq 250$.

252

4. Дана последовательность $y_n = n(n + 1)$. Известно, что разность двух членов этой последовательности с номерами k и l ($l < 125 < k$) делится на 3^{11} . Найдите **наименьшее** возможное значение суммы $l + k$.

282

5. Известно, что для всех пар положительных чисел $(x; y)$, для которых выполняются равенство $x + y = 8$ и неравенство $x^2 + y^2 > 35$, выполняется и неравенство $x^5 + y^5 > m$. Какое **наибольшее** значение может принимать m ?

4058

6. В правильный тетраэдр $KLMN$ с ребром $6\sqrt{3}$ вписана сфера Ω . Куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ расположен так, что его диагональ $A_1 C_1$ лежит на прямой KL , а прямая BD касается сферы Ω в точке, лежащей на отрезке BD . Какую **наименьшую** площадь поверхности может иметь куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$? Ответ округлите до десятых.

12

7. Известно, что число a удовлетворяет уравнению $x^3 + 6x^2 + 17x + 7 = 0$, а число b — уравнению $x^3 - 3x^2 + 8x + 5 = 0$. Найдите **наименьшее** возможное значение суммы $a + b$.

-1

8. Найдите **наибольшее** значение выражения $\cos(x + y + z)$, если числа x , y , z являются решениями системы

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{5}{9} + \cos x} = \frac{3}{4} \sin z + \frac{2}{3} \operatorname{ctg} z, \\ \sqrt{\frac{5}{9} + \cos y} = \frac{3}{4} \sin x + \frac{2}{3} \operatorname{ctg} x, \\ \sqrt{\frac{5}{9} + \cos z} = \frac{3}{4} \sin y + \frac{2}{3} \operatorname{ctg} y. \end{cases}$$

Ответ округлите до тысячных.

0,852

9. На столе лежит 150 внешне одинаковых монет. Известно, что среди них ровно 75 фальшивых. Разрешается указать на любые две монеты и спросить, верно ли, что обе эти монеты фальшивые. За какое **наименьшее** количество вопросов можно гарантированно получить по крайней мере один ответ «Верно»?

82

10. Во время опроса 76 человек каждому из них предлагалось указать один любимый фильм. Оказалось, что из любых 10 опрошенных по крайней мере 3 указали один и тот же фильм. При каком **наибольшем** M можно утверждать, что среди опрошенных обязательно найдутся M человек, указавших один и тот же фильм?

61