Олимпиада «Физтех» по математике

10 класс, онлайн-этап, 2017/18 год

1. Найдите **наименьшее** натуральное x, при котором из того, что $15m + 4n$ делится на 31, следует, что $17m + xn$ также делится на 31 (m и n — натуральные).

$\boxed{19}$

2. Найдите количество целочисленных решений $(x; y; z)$ уравнения $60^x \cdot \left(\frac{500}{3}\right)^y \cdot 360^z = 2160$, удовлетворяющих условию $|x + y + z| \leqslant 60$.

$\boxed{60}$

3. Две параболы $y = 5x^2 + ax + b$ и $y = -4x^2 + cx + d$ касаются в точке, лежащей на оси Ox. Через точку D — вторую точку пересечения первой параболы с осью Ox – проведена вертикальная прямая, пересекающая вторую параболу в точке A, а общую касательную к параболам — в точке B. Найдите отношение $BD : AB$.

$\boxed{1{,}25}$

4. Известно, что для всех пар положительных чисел $(x; y)$, для которых выполняются равенство $x+y = 7$ и неравенство $x^2+y^2 > 28$, выполняется и неравенство $x^4+y^4 > m$. Какое **наибольшее** значение может принимать m?

$\boxed{563{,}5}$

5. Внутри угла ABC, меньшего $135°$, взяты точки M и N так, что $\angle ABM = \angle MBN = \angle NBC$, $AM \perp BM$ и $AN \perp BN$. Прямая MN пересекает луч BC в точке K. Найдите MK, если $BM = 6, BK = \sqrt{11}$.

$\boxed{5}$

6. Окружность, проходящая через вершины A и C треугольника ABC, пересекает стороны AB и CB в точках Q и P соответственно. Биссектриса угла ABC пересекает отрезок AP в точке E и отрезок CQ — в точке F. Найдите длину AE, если $QF = 6$, $PE = 7$, $CF = 9$.

$\boxed{10{,}5}$

7. Известно, что число a удовлетворяет уравнению $x^3 + 3x^2 + 6x - 9 = 0$, а число b — уравнению $x^3 + 3x^2 + 6x + 17 = 0$. Найдите наибольшее возможное значение суммы $a + b$.

$\boxed{-2}$

8. Дана последовательность $x_n = n(n+1)$. Известно, что разность двух членов этой последовательности с номерами k и l ($l < 350 < k$) делится на 5^9. Найдите наименьшее возможное значение суммы $l + k$.

$\boxed{3124}$

9. В футбольном турнире, проходящем в один круг (каждая команда должна сыграть с каждой ровно по одному разу), играют N команд. В некоторый момент турнира тренер команды A заметил, что любые две команды, отличные от A, сыграли разное количество игр. Также известно, что к этому моменту команда A сыграла 15 игр. Какое количество N команд могло участвовать в этом турнире? В ответ запишите сумму всех возможных значений N.

93

10. На столе лежит 129 внешне одинаковых монет. Известно, что среди них ровно 65 фальшивых. Разрешается указать на любые две монеты и спросить, верно ли, что обе эти монеты фальшивые. За какое **наименьшее** количество вопросов можно гарантированно получить по крайней мере один ответ «Верно»?

66